1. Podać, dla jakich liczb a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1,d] \end{cases} \tag{1}$$

tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale $[0, d]$.

2. W każdym przedziale przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x)f_j + B(x)f_{j+1} + C(x)\xi_j'' + D(x)\xi_{j+1}'' \,, \tag{2}$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad C = \tfrac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2\,, \tag{3a}$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad D = \tfrac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2\,. \tag{3b}$$

Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $y''(x_j) = \xi_j''$, $y''(x_{j+1}) = \xi_{j+1}''$. Żądając ciągłości pierwszej pochodnej $y(x)$ w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznane wielkości ξ_j''.

3. Zaproponować algorytm pozwalający jawnie wyliczyć *współczynniki* wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.
Wskazówka: Niech

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) f_j \tag{4a}$$

będzie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Wiemy, że ma on postać

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,. \tag{4b}$$

Łatwo zauważyć, że $y(0) = a_0$, przy czym $y(0)$ łatwo wyliczamy ze wzoru (4a). Zauważmy dalej, że

$$\frac{y(x) - a_0}{x} = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1\,. \tag{5}$$

Sugeruje to, że aby znaleźć a_1, należy obliczyć lewą stronę równania (5) w zerze. Nie możemy jej jednak *obliczyć*, gdyż mielibyśmy dzielenie przez zero. Co jednak możemy zrobić? Uogólnij to podejście na dalsze współczynniki wielomianu.

4. *Interpolacja wymierna, algorytm Floatera i Hormanna (wykład 6).*

   (a) Pokazać, że wprzypadku równoodległych węzłów, wagi $\{w_i\}$ są dane wzorem (23).

   (b) Wyliczyć wagi $\{w_i\}$ dla $n = 65$ węzłów i parametru $d = 3$.

PFG