1. *Interpolacja Lagrange'a.* Danych jest n parami różnych punktów $\{x_j\}_{j=1}^n$, które nazywam *węzłami interpolacji* (parami różnych: żadne dwa punkty się nie powtarzają), oraz n liczb $\{f_j\}_{j=1}^n$. Definiuję

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) f_j \tag{1a}$$

gdzie

$$l_j(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}\,. \tag{1b}$$

Ile wynosi $y(x_k)$ jeśli x_k jest jednym z węzłów interpolacji? (Wskazówka: $l_j(x_k) = ?$) $y(x)$ jest wielomianem — którego stopnia? Jaka jest złożoność obliczeniowa wyliczania $y(x)$ dla dowolnego x? Odpowiedź uzasadnij.

2. *Interpolacja Hermite'a.* Niech $\{x_j\}_{j=1}^n$, $\{f_j\}_{j=1}^n$, $l_j(x)$ będą jak w poprzednim zadaniu. Dodatkowo niech $\{f'_j\}_{j=1}^n$ będzie jakimś innym ciągiem liczb. Definiuję teraz

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(x) f'_i\,, \tag{2a}$$

gdzie

$$h_i(x) = (1 - 2(x-x_i)l'_i(x_i))\, l_i^2(x)\,, \tag{2b}$$
$$\bar{h}_i(x) = (x-x_i) l_i^2(x)\,. \tag{2c}$$

Ile wynosi $y(x_k)$, $y'(x_k)$ (tutaj prim oznacza pochodną)? $y(x)$ jest wielomianem — którego stopnia? Jaka jest złożoność obliczeniowa wyliczania $y(x)$ dla dowolnego x? Odpowiedź uzasadnij.

3. *Dwucykl.* Niech $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ będzie pewną różniczkowalną funkcją. Definiuję odwzorowanie

$$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}\,, \tag{3}$$

gdzie f' oznacza pochodną funkcji f. Niech teraz $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1 \neq z_2$, będą pewnymi zadanymi punktami na płaszczyźnie zespolonej. Skonstruuj *wielomian* $f(z)$ o tej własności, że $g(z_1) = z_2$ oraz $g(z_2) = z_1$. Ile swobodnych parametrów ma ten wielomian?
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

4. *Trójcykl.* Przy oznaczeniach jak z poprzedniego zadania, mając dane trzy różne punkty $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, skonstruuj *wielomian* $f(z)$ o tej własności, że $g(z_1) = z_2$, $g(z_2) = z_3$, $g(z_3) = z_1$. Ile parametrów ma ten wielomian?

PFG