

1. *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $\|\mathbf{r}_1\| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k, \quad (1b)$$

$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k. \quad (1d)$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdych $i, j, i > j$, zachodzi

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = 0, \quad (2a)$$

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{p}_j = 0, \quad (2b)$$

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j = 0. \quad (2c)$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy \mathbf{A} ?

Wskazówka: Dowód należy przeprowadzić indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na tym, iż zakładamy, że pierwsze $k < N$ wektorów $\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$ spełnia (2). Następnie generujemy wektory $\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}$. Trzeba pokazać, że one także spełniają (2) korzystając z tego, że poprzednie wektory je spełniają. Dowód ten jest prosty, ale na ćwiczeniach stracimy na niego mnóstwo czasu, jeśli nie *spróbujecie* go Państwo przeprowadzić samodzielnie.

2. Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3)$$

przy czym macierz \mathbf{A} spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech \mathbf{x}_1 będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (3) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} \mathbf{x}_1 - \mathbf{b}$. W każdym kroku iteracji (1) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k. \quad (4)$$

Znaleźć związek pomiędzy \mathbf{x}_k a \mathbf{r}_k . Pokazać, że \mathbf{x}_{N+1} jest ścisłym rozwiązaniem równania (3) (w arytmetyce dokładnej).

3. *Wzór Shermana–Morrisona.* Niech \mathbf{A} będzie macierzą, której odwrotność jest znana, i niech

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T, \quad (5)$$

gdzie \mathbf{u}, \mathbf{v} są pewnymi wektorami. Symbol \cdot^T oznacza transpozycję. Znaleźć λ takie, że

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \lambda}. \quad (6)$$