Wstęp do metod numerycznych

Przybliżenia Padé

P. F. Góra

`http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/`

2020

Aproksymacja ciągła

Termin “aproksymacja” ma dwa znaczenia. Po pierwsze, może chodzić o aproksymację punktową, omawianą w jednym z poprzednich wykładów.

Po drugie, możemy mówić o aproksymacji ciągłej: Mając ustaloną funkcję $g(x)$, której sposób obliczania jest trudny, skonstruować inną funkcję, która będzie w pewnym sensie bliska funkcji wyjściowej, a jednocześnie obliczeniowo prostsza.

Spośród wszystkich (licznych!) zagadnień aproksymacji ciągłej, omówimy tylko przybliżenia Padé.

Przypuśmy, że znamy wartości pewnej funkcji $g(z)$ i jej pochodnych do rzędu N w zerze* i na tej podstawie chcemy skostruować przbliżenie funkcji $g(x)$ w pewnym przedziale zawierającym zero, tak, aby przybliżenie to zgadzało się z funkcją i jej N pochodnymi w zerze.

Najprostszym sposobem jest skonstruowanie rozwinięcia Maclaurina do rzędu N. Otrzymujemy w ten sposób wielomian, który co prawda spełnia wymagania w otoczeniu zera, ale przybliżenie wielomiwanowe zazwyczaj szybko załamuje się już w niewielkiej odległości od zera. Lepsze byłoby przybliżenie wymierne.

*Jeżeli wartości te znamy w jakimś innym punkcie, możemy za pomocą prostej zmiany zmiennych sprowadzić ten punkt do zera.

Niech poszukiwane przybliżenie ma postać

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum\limits_{j=0}^{k} b_j x^j}\,, \tag{1}$$

przy czym $b_0 = 1$ i niech szeregiem Maclaurina aproksymowanej funkcji będzie

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\,. \tag{2}$$

Przyjmijmy, że $m + k + 1 = N + 1$, czyli tyle, ile wyrazów zawiera szereg Maclaurina funkcji $g(x)$ do rzędu N. Obliczamy

$$g(x) - R_{mk}(x) = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{k} b_j x^j\right) - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum\limits_{j=0}^{k} b_j x^j}\,. \tag{3}$$

Funkcja $g(x)$ wraz z pochodnymi do rzędu N będzie się zgadzać z przybliżeniem (1), jeżeli w liczniku prawej strony równania (3) najniższy nieznikający wyraz będzie proporcjonalny do x^{N+1}. Otrzymujemy stąd warunki

$$\sum_{j=0}^{k} c_{N-s-j} b_j = 0 \quad s = 0, 1, \ldots, N-m-1;\ c_j = 0 \text{ dla } j < 0 \tag{4a}$$

$$\sum_{j=0}^{r} c_{r-j} b_j = a_r \quad r = 0, 1, \ldots, m;\ b_j = 0 \text{ dla } j > k \tag{4b}$$

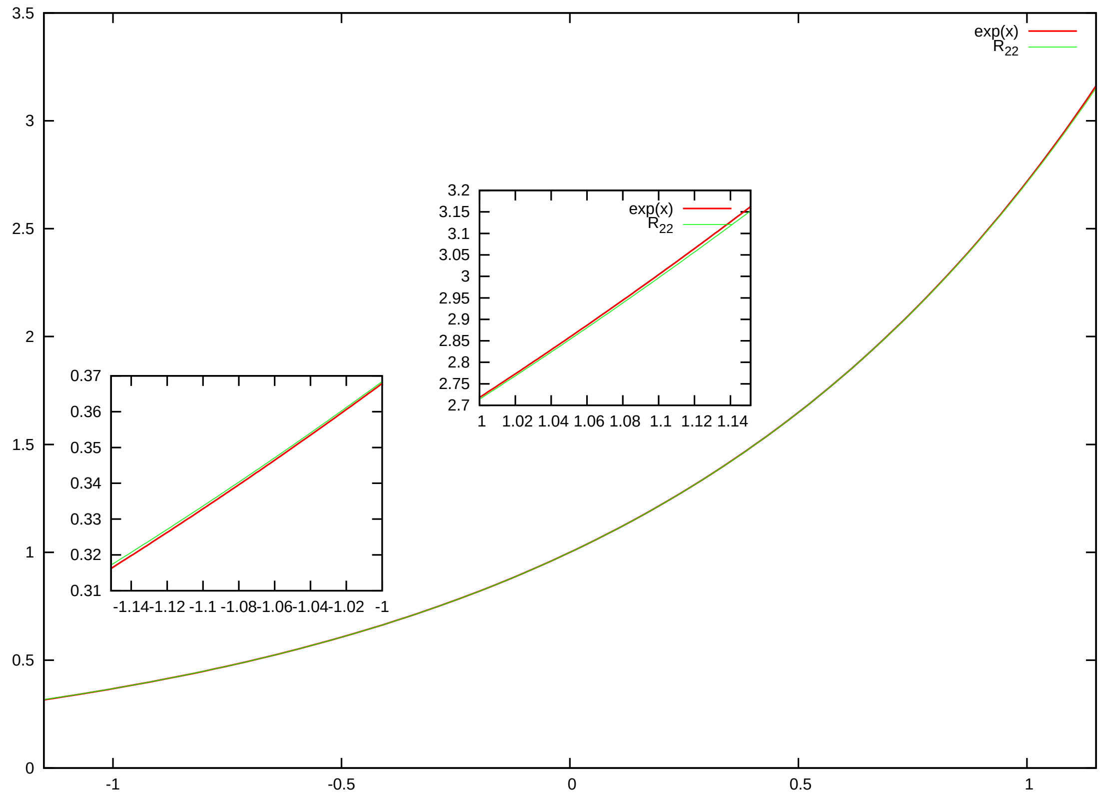
(4) stanowi układ $N+1$ równań liniowych na $N+1$ współczyników a_r, b_j.

Przykład

Przybliżeniem Padé $R_{22}(x)$ funkcji e^x jest

$$R_{22}(x) = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} \,. \tag{5}$$

Błąd tego przybliżenia w przedziale $[-\frac{1}{2}\ln 10, \frac{1}{2}\ln 10]$ nie przekracza 0.01.



Funkcja e^x i jej przybliżenie (5).

Przybliżenie Czebyszewa

Okazuje się, że lepsze przybliżenie uzyskuje się biorąc zamiast (1) iloraz wielomianów Czebyszewa:

$$C_{mk}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j T_j(x)}{\sum\limits_{j=0}^{k} b_j T_j(x)}, \tag{6}$$

gdzie $T_j(x)$ jest j-tym wielomianem Czebyszewa. Dla $x \in (-1, 1)$ są one zdefiniowane jako

$$T_j(x) = \cos(j \,\mathrm{arc}\,\cos x) \tag{7}$$

i poprzez przedłużenie analityczne poza tym przedziałem. $T_j(x)$ jest wielomianem stopnia j, o najmniejszym wahaniu w przedziale $[-1, 1]$.

Niech funkcja $g(x)$ posiada rozwinięcie Czebyszewa

$$g(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x)\,. \tag{8}$$

Współczynniki tego rozwinięcia otrzymujemy obliczając

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{g(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx\,. \tag{9}$$

(*Numerycznie* należy obliczać taką całkę za pomocą kwadratur Gaussa-Czebyszewa, nieomówionych w tym kursie.)

Postępując jak poprzednio i korzystając z rozwinięcia (8), obliczamy

$$g(x) - C_{mk}(x) \tag{10}$$

żądając, aby w liczniku współczynniki przy $T_j(x)$ znikały tożsamościowo dla $j = 0, 1, \ldots, N$. Otrzymujemy stąd układ równań

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} b_i c_i \tag{11a}$$

$$a_r = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} b_i \left(c_{|r-i|} + c_{r+i}\right) \tag{11b}$$

($a_{r>m} \equiv 0$).

Przybliżenia Czebyszewa są lepsze od przybliżeń Padé, gdyż błąd tych pierwszych zachowuje się bardziej regularnie w całym przedziale.