Rozwiązanie jednego z zadań

Za pomocą obrotów Givensa rozwiąż następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Przedstaw kolejne kroki algorytmu, to znaczy pokaż *explicite*, w jaki sposób "czyszczone" są kolejne kolumny.

Rozwiązanie:

Niech $\mathbf{G}_i$ oznaczają kolejne macierze Givensa.

Macierz $\mathbf{G}_1$ ma postać

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

a równanie (1), pomnożone z lewej przez $\mathbf{G}_1$, ma postać

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

W następnym kroku

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

a przekształcone równanie przybiera postać

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} & -\frac{32}{\sqrt{5}\sqrt{14}} & -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Wreszcie

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

a równanie

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} & -\frac{32}{\sqrt{5}\sqrt{14}} & -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{14}} & \frac{8\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{14}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

W ten sposób dokonaliśmy, za pomocą obrotów Givensa, transformacji równania (1) do postaci równania z macierzą trójkątną górną. Zapiszmy teraz równanie (7) w postaci "konwencjonalnej":

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\sqrt{5}x_1 & + & \frac{8}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{2}{\sqrt{5}}x_3 & & & = & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ & & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{32}{\sqrt{5}\sqrt{14}}x_3 & - & \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{14}}x_4 & = & -\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{14}} \\ & & & & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{14}}x_3 & + & \frac{8\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}}x_4 & = & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \\ & & & & & & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x_4 & = & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \end{array}\right. \tag{8}$$

Równania te będziemy teraz rozwiązywać metodą *backsubstitution*, podstawiając od razu rozwiązania do wcześniejszych równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\sqrt{5}x_1 & + & \frac{8}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{2}{\sqrt{5}}x_3 & & & = & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ & & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{32}{\sqrt{5}\sqrt{14}}x_3 & - & \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{2} & = & -\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{14}} \\ & & & & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{14}}x_3 & + & \frac{8\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \\ & & & & & & x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{9a}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\sqrt{5}x_1 & + & \frac{8}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & = & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ & & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}x_2 & - & \frac{32}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & = & \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{14}} \\ & & & & x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ & & & & x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{9b}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2\sqrt{5}x_1 & + & \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ & & x_2 & = & -\frac{1}{2} \\ & & x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ & & x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{9c}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & \frac{1}{2} \\ x_2 & = & -\frac{1}{2} \\ x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{9d}$$

Komentarz: Obroty Givensa wraz z *backsubstitution* nie wydają się być szczególnie efektywną metodą rozwiązywania układu równań (1). Istotnie, gdyby z pierwszego z równań wyeliminować pierwszą zmienną, a z ostatniego czwartą (pierwsze i ostatnie równanie łączą tylko dwie zmienne), dostalibyśmy bardzo prosty do rozwiązania układ równań na zmienne (x_2, x_3). Procedura taka nie byłaby jednak wygodna — a z pewnością nie dałoby się jej przeprowadzić ręcznie — dla trójdiagonalnego, symetrycznego układu z 400 lub 4000, lub znacznie więcej zmiennych. Obroty Givensa są bardzo łatwe do zaprogramowania i pozwalają rozwiązać trójdiagonalny, symetryczny układ równań w czasie liniowym, jako że w każdym kroku przetwarzamy *tylko dwa* równania, pozostałe zaś nie zmieniają się pod wpływem obrotu Givensa.

PFG