1. Znajdź krotności wszystkich miejsc zerowych funkcji

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \sinh^3 x\,. \tag{1}$$

2. Znajdź równanie charakterystyczne macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Niech $z^\star$ będzie k-krotnym miejscem zerowym funkcji $f(z)$. Udowodnij, że metoda Newtona jest zbieżna do $z^\star$ liniowo.

4. Niech $a \in \mathbb{R}\colon a > 0$. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej udowodnij, że iteracja

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right) \tag{3}$$

jest zbieżna do $\sqrt{a}$ dla wszystkich dodatnich punktów początkowych i do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich ujemnych punktów początkowych.

5. Jak za pomocą metody Newtona wyznaczyć $\sqrt[3]{3}$?

6. Skonstruuj wielomian, dla którego metoda Newtona ma dwucykl.
Wskazówki:

   (a) Metoda Newtona ma postać odwzorowania $z_{n+1} = g(z_n)$, gdzie

   $$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \tag{4}$$

   Dwucykl składa się z dwóch punktów, $\{z_1^\star, z_2^\star\}$, o tej własności, że $g(z_1^\star) = z_2^\star$, $g(z_2^\star) = z_1^\star$. Każdy z punktów dwucyklu jest punktem stałym dwukrotnego złożenia odwzorowania Newtona, $z_1^\star = g(g(z_1^\star))$, który nie jest jednocześnie punktem stałym samego odwzorowania Newtona, $z_1^\star \neq g(z_1^\star)$ (dlaczego?) i analogicznie dla $z_2^\star$.

   (b) Skorzystaj z interpolacji Hermite'a.

PFG