

1. Podać, dla jakich liczb a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1, d] \end{cases} \quad (1)$$

tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale $[0, d]$.

2. W każdym przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x)f_j + B(x)f_{j+1} + C(x)\xi_j'' + D(x)\xi_{j+1}'', \quad (2)$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \quad (3a)$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2. \quad (3b)$$

Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $y''(x_j) = \xi_j''$, $y''(x_{j+1}) = \xi_{j+1}''$. Żądając ciągłości pierwszej pochodnej $y(x)$ w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznanne wielkości ξ_j'' .

3. Zaproponować algorytm pozwalający jawnie wyliczyć współczynniki wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.

Wskazówka: Niech

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j \quad (4a)$$

będzie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Wiemy, że ma on postać

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (4b)$$

Łatwo zauważyć, że $y(0) = a_0$, przy czym $y(0)$ łatwo wyliczamy ze wzoru (4a). Zauważmy dalej, że

$$\frac{y(x) - a_0}{x} = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1. \quad (5)$$

Sugeruje to, że aby znaleźć a_1 , należy obliczyć lewą stronę równania (5) w zerze. Nie możemy jej jednak obliczyć, gdyż mielibyśmy dzielenie przez zero. Co jednak możemy zrobić? Uogólnij to podejście na dalsze współczynniki wielomianu.

4. *Interpolacja wymierna, algorytm Floatera i Hormanna (wykład 5).*

(a) Pokazać, że w przypadku równoodległych węzłów, wagi $\{w_i\}$ są dane wzorem (23).

(b) Wyliczyć wagi $\{w_i\}$ dla $n = 65$ węzłów i parametru $d = 3$.

5. *Interpolacja Hermite'a.* Wielomian interpolacyjny Hermite'a dany jest wzorem

$$y(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^n \bar{h}_i(x) f_i', \quad (6)$$

gdzie

$$h_i(x) = (1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i))l_i^2(x), \quad (7a)$$

$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x). \quad (7b)$$

l_i, x_j — oznaczają to samo, co w interpolacji Lagrange'a. Pokazać, że $y(x_i) = f_i$, $y'(x_i) = f_i'$.