1. *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||\mathbf{r}_1|| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}\,, && \text{(1a)} \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k\,, && \text{(1b)} \\ \beta_k &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}\,, && \text{(1c)} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k\,. && \text{(1d)} \end{aligned}$$

Udowodnić, że dla każdych i, j, $i > j$, zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j &= 0\,, && \text{(2a)} \\ \mathbf{r}_i^T \mathbf{p}_j &= 0\,, && \text{(2b)} \\ \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j &= 0\,. && \text{(2c)} \end{aligned}$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy $\mathbf{A}$?

Wskazówka: Dowód należy przeprowadzić indukcyjnie. Dowód ten jest prosty, ale na ćwiczeniach stracimy na niego mnóstwo czasu, jeśli nie *spróbujecie* go Państwo przeprowadzić samodzielnie.

2. Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3}$$

przy czym macierz $\mathbf{A}$ spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech $\mathbf{x}_1$ będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (3) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}$. W każdym kroku iteracji (1) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k\,. \tag{4}$$

Znaleźć związek pomiędzy $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{r}_k$. Pokazać, że $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania (3) (w arytmetyce dokładnej).

3. *Wzór Shermana–Morrisona.* Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą, której odwrotność jest znana, i niech

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u}\,\mathbf{v}^T\,, \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ są pewnymi wektorami. Symbol $\cdot^T$ oznacza transpozycję. Znaleźć λ takie, że

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\lambda}\,. \tag{6}$$

PFG