1. Niech $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$, $\|\mathbf{e}\| = 1$. Znajdź wektory i wartości własne macierzy

$$\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T \,. \tag{1}$$

2. Za pomocą obrotów Givensa rozwiąż następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Przedstaw kolejne kroki algorytmu, to znaczy pokaż *explicite*, w jaki sposób "czyszczone" są kolejne kolumny. (Tak, proszę to zadanie zrobić *analitycznie*, w arytmetyce dokładnej. Można — ale nie trzeba — wspomóc się programami do obliczeń symbolicznych.)

3. Dana jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1 & 0 & b_3 & a_4 & b_4 & 0 & d_4 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & 0 & b_4 & a_5 & b_5 & 0 & d_5 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3}$$

Jest to macierz symetryczna; możemy na przyszłe potrzeby założyć, że jest także dodatnio określona.

(a) Czy to jest macierz rzadka? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Zaproponuj *efektywny* sposób zapamiętywania tej macierzy.

(b) Niech $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ będzie wektorem. Korzystając z wyników poprzedniego podpunktu, zaproponuj *efektywny*, to znaczy unikający niepotrzebnych mnożeń przez zera, algorytm obliczania iloczynu $\mathbf{A}\mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o postaci (3), i oszacuj złożoność obliczeniową tego algorytmu. Przedstaw stosowny kod w wybranym języku programowania lub pseudokod.

PFG