Częściowe rozwiązania

4. Niech $a \in \mathbb{R}\colon a > 0$. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej udowodnij, że iteracja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{1a}$$

jest zbieżna do $\sqrt{a}$ dla wszystkich dodatnich punktów początkowych i do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich ujemnych punktów początkowych.

Rozwiązanie:

(a) Łatwo sprawdzić, że $x^* = \pm\sqrt{a}$ są punktami stałymi iteracji (1a) i że nie ma żadnych innych punktów stałych.

(b) Zauważmy, że jeżeli $x_n > 0$, to $x_{n+1} > 0$.

(c) Niech $x_n > 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned}
(x_n - \sqrt{a})^2 &> 0 \\
x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a &> 0 \\
x_n^2 + a &> 2\sqrt{a}x_n \\
\frac{x_n^2 + a}{2x_n} &> \sqrt{a} \\
\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) &> \sqrt{a} \\
x_{n+1} &> \sqrt{a} \qquad (1b)
\end{aligned}$$

Zatem, jeżeli $x_n > 0$, to $x_{n+1} > \sqrt{a}$. Zauważmy przy tym, że jeśli $0 < x_0 < \sqrt{a}$, to x_1, x_2 i wszystkie następne spełniają $x_n > \sqrt{a}$; oczywiście zachodzi to także dla $x_0 > \sqrt{a}$.

(d) Niech $d_n = x_n - \sqrt{a}$. Jeżeli $x_n > \sqrt{a}$, to $d_n > 0$. *Musi* także zachodzić $d_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$.

$$d_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = d_n - \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right). \tag{1c}$$

(e) Jednocześnie

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1\colon x_n &> \sqrt{a} \\
x_n^2 &> a \\
x_n^2 - a &> 0 \\
\frac{x_n^2 - a}{x_n} &> 0 \\
\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) &> 0\,. \qquad (1d)
\end{aligned}$$

Z (1c) i (1d) wynika zatem, że

$$\forall n \geqslant 1\colon \quad 0 < d_{n+1} < d_n\,, \tag{1e}$$

a więc iteracja (1a) jest odwzorowaniem zwężającym, *być może* poza pierwszym krokiem. Musi być wobec tego zbieżna do punktu stałego, a ponieważ jedynym dodatnim punktem stałym jest $\sqrt{a}$, dla $x_0 > 0$ iteracja (1a) jest zbieżna do $\sqrt{a}$.

Rozwiązanie dla ujemnego punktu startowego przebiega analogicznie.

6. Skonstruuj wielomian, dla którego metoda Newtona ma dwucykl.
   Wskazówki:
   (a) Metoda Newtona ma postać odwzorowania $z_{n+1} = g(z_n)$, gdzie
   $$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \tag{2a}$$
   Dwucykl składa się z dwóch punktów, $\{z_1^\star, z_2^\star\}$, o tej własności, że $g(z_1^\star) = z_2^\star$, $g(z_2^\star) = z_1^\star$. Każdy z punktów dwucyklu jest punktem stałym dwukrotnego złożenia odwzorowania Newtona, $z_1^\star = g(g(z_1^\star))$, który nie jest jednocześnie punktem stałym samego odwzorowania Newtona, $z_1^\star \neq g(z_1^\star)$ (dlaczego?) i analogicznie dla $z_2^\star$.
   (b) Skorzystaj z interpolacji Hermite'a.

Rozwiązanie: Niech dwucykl składa się z punktów z_1, z_2. Aby punkty te faktycznie tworzyły dwucykl, musi zachodzić

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}\,, \tag{2ba}$$
$$z_1 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)}\,. \tag{2bb}$$

Stąd łatwo można wyliczyć, że $f'(z_1) = -\frac{f(z_1)}{z_2-z_1}$, $f'(z_2) = \frac{f(z_2)}{z_2-z_1}$. Otrzymujemy zatem następujące warunki:

z	z_1	z_2
$f(z)$	f_1	f_2
$f'(z)$	$-\dfrac{f_1}{z_2-z_1}$	$\dfrac{f_2}{z_2-z_1}$

(2c)

Stosując do "danych" z tabelki (2c) interpolację Hermite'a, otrzymujemy wielomian

$$y(z) = \frac{1}{(z_2-z_1)^3}\left[(z-2z_1+z_2)(z-z_2)^2 f_1 - (z+z_1-2z_2)(z-z_1)^2 f_2\right]. \tag{2d}$$

Jeśli, na przykład, weźmiemy $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $f_1 = f_2 = 1$ otrzymamy (z dokładnością do nieistotnego czynnika stałego)

$$y(z) = z^2 + 3\,. \tag{2e}$$

Wielomian (2e) nie ma *rzeczywistych* miejsc zerowych, ale ma dwucykl we wskazanych punktach.

Uwaga: Baseny atrakcji w metodzie Newtona (i Halley'a) dla wielomianu (2e) są *bardzo* nieciekawe. Do rozwiązania odpowiednich zadań numerycznych z następnego zestawu proszę wziąć jakiś wielomian, który ma dwucykl na argumentach rzeczywistych oraz co najmniej jedno rzeczywiste miejsce zerowe. Jeśli nie macie Państwo lepszego pomysłu, proszę wziąć $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = -1$.

PFG