Rozwiązanie jednego z zadań z tego zestawu: Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Norma macierzy zdefiniowana jest jako

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \{\|\mathbf{Ax}\|\}\,. \tag{2}$$

Wobec tego

$$\|\mathbf{A}\|^2 \leqslant \|\mathbf{Ax}\|^2\,, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = 1\,. \tag{3}$$

Niech $\mathbf{x} = [a, b]^T$.

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = (a+b)^2 + b^2\,. \tag{4}$$

Musimy znaleźć największą wartość wyrażenia (4) przy warunku $a^2+b^2 = 1$. Zrobimy to za pomocą mnożników Lagrange'a. Tworzymy funkcjonał

$$\mathcal{L} = (a+b)^2 + b^2 - \lambda(a^2 + b^2 - 1) \tag{5}$$

Teraz musimy rozwiązać układ równań $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = 0\,, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b} = 0\,, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0\,,$ czyli

$$2(a+b) - 2\lambda a \quad = \quad 0\,, \tag{6a}$$
$$2(a+b) + 2b - 2\lambda b \quad = \quad 0\,, \tag{6b}$$
$$-(a^2 + b^2 - 1) \quad = \quad 0\,. \tag{6c}$$

Po wyeliminowaniu λ z pierwszych dwóch równań (6) otrzymujemy

$$a^2 + ab \quad = \quad b^2\,, \tag{7a}$$
$$a^2 + b^2 \quad = \quad 1\,. \tag{7b}$$

Eliminujemy b z równań (7), doprowadzając do równania dwukwadratowego:

$$5a^4 - 5a^2 + 1 = 0\,, \tag{8}$$

$$a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}\,, \quad b^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}\,. \tag{9}$$

Zauważmy, że

$$a^2b^2 = \frac{1}{5}\,, \quad ab = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\,. \tag{10}$$

Wybierając kombinację znaków, która daje *największy* wynik, otrzymujemy

$$(a+b)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab + b^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{11}$$

Ostatecznie

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \simeq 1.618034\,. \tag{12}$$

PFG