Warunkiem konieczny (nie wystarczającym) uzyskania zaliczenia jest rozwiązanie co najmniej 13 z poniższych zadań, przy czym zadania oznaczone literą “O” są obowiązkowe. Jeśli zadanie ma podpunkty, to wciąż jest to jedno zadanie.

W rozwiązaniu należy wskazać algorytm, którym się posłużono i uzasadnić jego wybór. Rozwiązania wykorzystujące niewłaściwy algorytm (na przykład algorytm dla macierzy pełnej w przypadku macierzy rzadkiej) będą odrzucane. Rozwiązanie powinno obejmować krótkie omówienie wyników. Do rozwiązania proszę dołączyć kod programu. Rozwiązanie każdego zadania osobno, w postaci jednego pliku pdf o nazwie `XXnazwisko.pdf`, gdzie `XX` są cyframi odpowiadającymi numerowi zadania — plików przysyłanych w innych formatach **nie będę uwzględniał!** — proszę przesyłać do mnie elektronicznie na adres pawel.gora@uj.edu.pl.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2 O. Dobierając odpowiedni algorytm (wybór należy uzasadnić!), rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Dane są następująca macierz i wektory:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -116.66654 & 583.33346 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ 583.33346 & -116.66654 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ -333.33308 & -333.33308 & 133.33383 & 200.00025 & 200.00025 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & 50.000125 & -649.99988 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & -649.99988 & 50.000125 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559856 \\ 1.31947922 \\ -0.09473435 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559855 \\ 1.32655028 \\ -0.10180541 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0.72677951 \\ 0.72677951 \\ -0.27849178 \\ 0.96592583 \\ 0.96592583 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0.73031505 \\ 0.73031505 \\ -0.27142071 \\ 0.96946136 \\ 0.96946136 \end{bmatrix}.$$

Definiujemy $\mathbf{z}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Obliczyć $||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$, $||\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2||/||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4||/||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$. Zinterpretować otrzymane wyniki. (Interpretacja "coś tam jest mniejszeod czegoś innego" **nie wystarcza**. *Dlaczego* to coś jest mniejsze?)

4 O. Dane jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128\times128}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą (4), natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) metody Gaussa-Seidela,

(b) metody gradientów sprzężonych.

Algorytmy **muszą** uwzględniać strukturę macierzy (4) — w przeciwnym razie zadanie nie będzie zaliczone!
Oba algorytmy proszę zastartować z tego samego przybliżenia początkowego. Porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, to znaczy jak zmieniaję się normy $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$, gdzie $\mathbf{x}_k$ oznacza $k$-ty iterat. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy.

5. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Przy użyciu metody potęgowej znajdź jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

6. Sprowadź macierz z zadania 5 do postaci trójdiagonalnej, a następnie znajdź jej wszystkie wartości własne.

7. Konstruując odpowiednią macierz symetryczną, rzeczywistą, znajdź wartości własne i unormowane wektory własne poniższej macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Wskazówka: Wektory własne tej macierzy mogą być zespolone. Normę wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ obliczamy jako $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$.

8. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Znajdź jej (przybliżony) wektor własny do wartości własnej $\lambda \simeq 0.38197$.

9. Zbudować wielomian interpolacyjny oparty na następującej tabelce:

| $x$ | $-1.2300$ | $-1.1900$ | $-0.7400$ | $0.1100$ | $2.5600$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1.5129$ | $1.4161$ | $0.5476$ | $0.0121$ | $6.5536$ |

Podać **jawne** współczynniki wielomianu interpolacyjnego.

10 O. Znajdź, z dokładnością do czterech cyfr dziesiętnych, wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego opartego na następującej tabelce:

| $x$ | $0.062500$ | $0.187500$ | $0.312500$ | $0.437500$ | $0.562500$ | $0.687500$ | $0.812500$ | $0.935700$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0.687959$ | $0.073443$ | $-0.517558$ | $-1.077264$ | $-1.600455$ | $-2.080815$ | $-2.507266$ | $-2.860307$ |

Sporządź wykres uzyskanego wielomianu w przedziale $-1 \leqslant x \leqslant 1$ i zaznacz na nim punkty, które posłużyły do jego konstrukcji.

11. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{8}$$

w punktach $-1$, $-1+\frac{1}{32}$, $-1+\frac{2}{32}$, $\ldots$, $1-\frac{1}{32}$, $1$, a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (8) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

12 O. Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 11. Sporządzić jego wykres.

13. Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 11. Sporządzić odpowiedni wykres.

14 O. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę

$$I = \int_0^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx \tag{9}$$

z dokładnością do $10^{-7}$.
Wskazówka:

$$I = \underbrace{\int_0^A \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_A^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx}_{I_{\text{ogon}}} \tag{10}$$

prz czym

$$|I_{\text{ogon}}| \leqslant \int_A^\infty \left|\sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\right| e^{-x}\, dx \leqslant \int_A^\infty e^{-x}\, dx = e^{-A}\,. \tag{11}$$

Znajdź $A$ takie, że $e^{-A} < 10^{-7}$, a następnie znajdź numerycznie wartość $I_1$ z odpowiednią dokładnością.

15. Niech

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right) e^{-t^2}\, dt \tag{12}$$

Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ z dokładnością $10^{-8}$.

16. Dane jest równanie

$$(x^2-1)\sinh^3 x = 0\,. \tag{13}$$

Zastosuj algorytm siecznych i algorytm oparty o trzypunktową interpolację odwrotną do znalezienia rozwiązania równania (13), startując, odpowiednio, z dwu i trzech losowych punktów z przedziału $(0,1)$. Punkty początkowe dla metody siecznych mają być dwoma z trzech punktów początkowych dla algorytmu opartego o iterację odwrotną. Wyznacz miejsce zerowe z dokładnością do $10^{-8}$. Powtórz zadanie dla kilku(nastu) różnych zestawów punktów początkowych. Porównaj wyniki.

17 O. Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań

$$243z^7 - 486z^6 + 783z^5 - 990z^4 + 558z^3 - 28z^2 - 72z + 16 = 0 \tag{14a}$$

$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \tag{14b}$$

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \tag{14c}$$

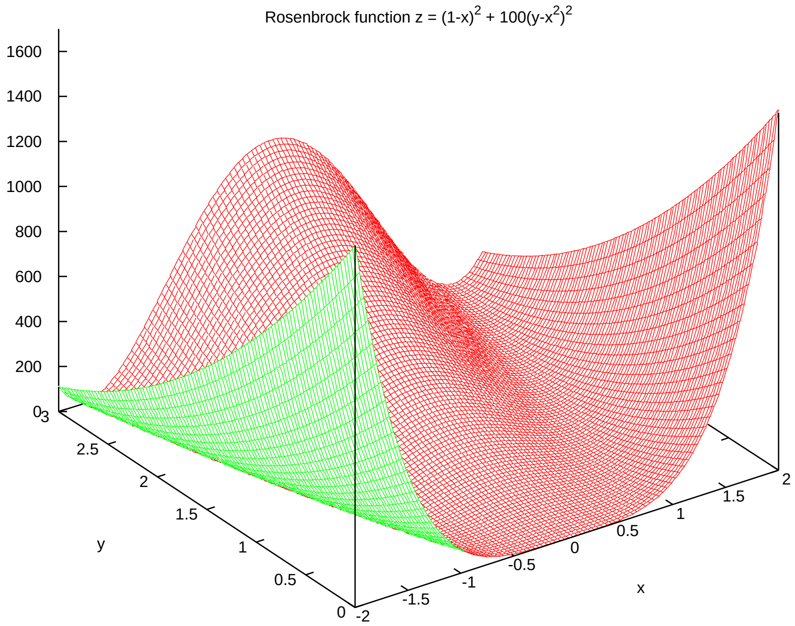
18. Rozwiąż układ równań

$$
\begin{aligned}
2x^2 + y^2 &= 2 && \text{(15a)} \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 &= \frac{1}{4} && \text{(15b)}
\end{aligned}
$$

19. Sporządź naturalny splajn kubiczny na podstawie danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/dane.txt`. Przedstaw graficznie punkty danych i znaleziony splajn.

20. Stosując metodę Brenta znajdź minimum funkcji skonstruowanej w poprzednim zadaniu (znalezionego splajnu!), startując z losowo wybranej pary bliskoleżących punktów z przedziału $[-1.5 : 1.5]$; użyj tej pary to znalezienia trójki punktów wstępnie otaczających minimum. Powtórz zadanie dla kilkunastu różnych par punktów początkowych.

21 O. Znajdź numerycznie (analitycznie zrobić można to bardzo łatwo) minimum funkcji Rosenbrocka (zobacz rysunek)




$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2\,. \tag{16}$$

Rozpocznij poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacuj, ile trzeba kroków aby zbliżyć się do minimum narozsądną odległość. Przedstaw graficznie drogę, jaką przebywa algorytm poszukujący minimum (to znaczy pokaż położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

22*. Startując z kilku losowo wybranych punktów poczatkowych, spróbuj numerycznie znaleźć minima *czterowymiarowej* funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1,x_2,x_2,x_4) = (1-x_1)^2 + 100(x_2-x_1^2)^2 + 100(x_3-x_2^2)^2 + 100(x_4-x_3^2)^2\,. \tag{17}$$

23. Startując ze 128 punktów początkowych, rozmieszczonych losowo w kwadracie $[-3, 3] \times [-3, 3]$, znajdź minima funkcji

$$f(x, y) = 0.25x^4 + y^2 - 0.5x^2 + 0.125x + 0.0625(x - y) \tag{18}$$

24. Dopasuj wielomiany niskich stopni do danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/w.txt`, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike, jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - w(x_i))^2 \,, \tag{19}$$

gdzie $(x_i, y_i)$ oznaczają punkty pomiarowe, $N$ jest liczbą pomiarów, $w(x)$ dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów (czyli współczynników dopasowanego wielomianu).
Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicite znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.

25*. Znajdź przybliżenia Padé $R_{40}$, $R_{31}$, $R_{22}$, $R_{13}$, $R_{04}$ funkcji

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin\theta^2}\, d\theta \,, \quad x \in (-1, 1) \tag{20}$$

Sporządź ich wykresy, oraz wykres samej funkcji (20), w przedziale $[-0.5, 0.5]$.
Wskazówka: *Use Mathematica, Luke!*

PFG