

Warunkiem koniecznym (nie wystarczającym) uzyskania zaliczenia jest rozwiązanie co najmniej 13 z poniższych zadań, przy czym zadania oznaczone literą “O” są obowiązkowe. Jeśli zadanie ma podpunkty, to wciąż jest to jedno zadanie.

W rozwiązaniu należy wskazać algorytm, którym się posłużono i uzasadnić jego wybór. Rozwiązania wykorzystujące niewłaściwy algorytm (na przykład algorytm dla macierzy pełnej w przypadku macierzy rzadkiej) będą odrzucone. Rozwiązanie powinno obejmować krótkie omówienie wyników. Do rozwiązania proszę dołączyć kod programu. Rozwiązanie każdego zadania osobno, w postaci jednego pliku pdf o nazwie XXnazwisko.pdf, gdzie XX są cyframi odpowiadającymi numerowi zadania, proszę przesyłać do mnie elektronicznie na adres pawel.gora@uj.edu.pl.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2 O. Dobierając odpowiedni algorytm (wybór należy uzasadnić!), rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

3. Dane są następująca macierz i wektory:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -116.66654 & 583.33346 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ 583.33346 & -116.66654 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ -333.33308 & -333.33308 & 133.33383 & 200.00025 & 200.00025 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & 50.000125 & -649.99988 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & -649.99988 & 50.000125 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559856 \\ 1.31947922 \\ -0.09473435 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559855 \\ 1.32655028 \\ -0.10180541 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0.72677951 \\ 0.72677951 \\ -0.27849178 \\ 0.96592583 \\ 0.96592583 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0.73031505 \\ 0.73031505 \\ -0.27142071 \\ 0.96946136 \\ 0.96946136 \end{bmatrix}.$$

Definiujemy $\mathbf{z}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Obliczyć $\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|$, $\|\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4\|$, $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|/\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|$, $\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4\|/\|\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4\|$. Zinterpretować otrzymane wyniki.

4 O. Dane jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128 \times 128}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą (4), natomiast \mathbf{e} jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

- metody Gaussa-Seidela,
- metody gradientów sprzężonych.

Algorytmy **muszą** uwzględniać strukturę macierzy (4) — w przeciwnym razie zadanie nie będzie zaliczone!

Oba algorytmy proszę zstartować z tego samego przybliżenia początkowego. Porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, to znaczy jak zmieniają się normy $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$, gdzie \mathbf{x}_k oznacza k -ty iterat. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy.

5. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Przy użyciu metody potęgowej znajdź jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

6. Sprowadź macierz z zadania 5 do postaci trójdzielnej, a następnie znajdź jej wszystkie wartości własne.

7. Konstruując odpowiednią macierz symetryczną, rzeczywistą, znajdź wartości własne i unormowane wektory własne poniższej macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Wskazówka: Wektory własne tej macierzy mogą być zespolone. Normę wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ obliczamy jako $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$.

8. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Znajdź jej (przybliżony) wektor własny do wartości własnej $\lambda \simeq 0.38197$.

9. Zbudować wielomian interpolacyjny oparty na następującej tabelce:

x	-1.2300	-1.1900	-0.7400	0.1100	2.5600
y	1.5129	1.4161	0.5476	0.0121	6.5536

Podać **jawne** współczynniki wielomianu interpolacyjnego.

- 10 O. Znajdź, z dokładnością do czterech cyfr dziesiętnych, wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego opartego na następującej tabelce:

x	0.062500	0.187500	0.312500	0.437500	0.562500	0.687500	0.812500	0.935700
$f(x)$	0.687959	0.073443	-0.517558	-1.077264	-1.600455	-2.080815	-2.507266	-2.860307

Sporządź wykres uzyskanego wielomianu w przedziale $-1 \leq x \leq 1$ i zaznacz na nim punkty, które posłużyły do jego konstrukcji.

11. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 + 5x^2} \quad (8)$$

w punktach $-1, -1 + \frac{1}{32}, -1 + \frac{2}{32}, \dots, 1 - \frac{1}{32}, 1$, a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (8) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

- 12 O. Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 11. Sporządzić jego wykres.

13. Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 11. Sporządzić odpowiedni wykres.

14 O. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę

$$I = \int_0^{\infty} \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx \quad (9)$$

z dokładnością do 10^{-7} .

Wskazówka:

$$I = \underbrace{\int_0^A \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_A^{\infty} \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx}_{I_{\text{ogon}}} \quad (10)$$

prz czym

$$|I_{\text{ogon}}| \leq \int_A^{\infty} \left| \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) \right| e^{-x} dx \leq \int_A^{\infty} e^{-x} dx = e^{-A}. \quad (11)$$

Znajdź A takie, że $e^{-A} < 10^{-7}$, a następnie znajdź numerycznie wartość I_1 z odpowiednią dokładnością.

15. Niech

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right) e^{-t^2} dt \quad (12)$$

Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ z dokładnością 10^{-8} .

16. Dane jest równanie

$$(x^2 - 1) \sinh^3 x = 0. \quad (13)$$

Zastosuj algorytm siecznych i algorytm oparty o trzypunktową interpolację odwrotną do znalezienia rozwiązania równania (13), startując, odpowiednio, z dwu i trzech losowych punktów z przedziału $(0, 1)$. Punkty początkowe dla metody siecznych mają być dwoma z trzech punktów początkowych dla algorytmu opartego o iterację odwrotną. Wyznacz miejsce zerowe z dokładnością do 10^{-8} . Powtórz zadanie dla kilku(nastu) różnych zestawów punktów początkowych. Porównaj wyniki.

17 O. Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań

$$243z^7 - 486z^6 + 783z^5 - 990z^4 + 558z^3 - 28z^2 - 72z + 16 = 0 \quad (14a)$$

$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \quad (14b)$$

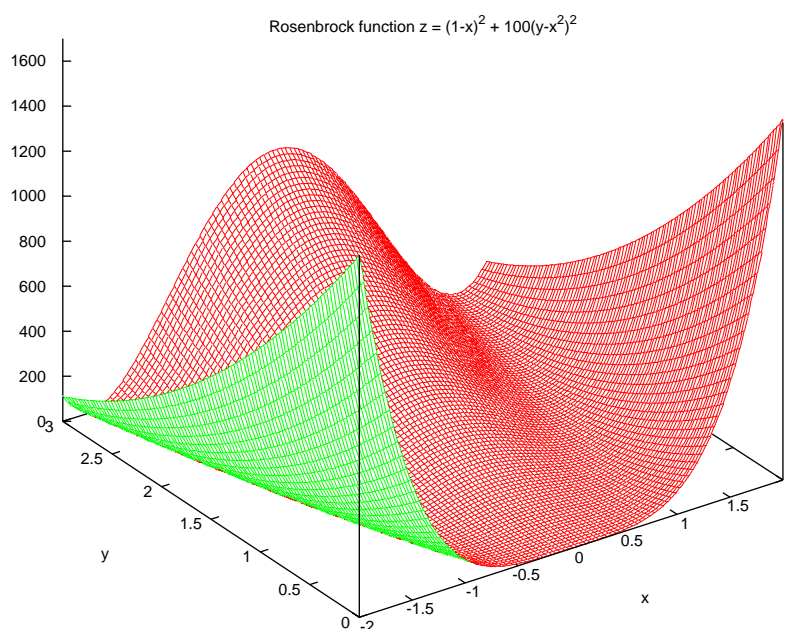
$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \quad (14c)$$

18. Rozwiąż układ równań

$$2x^2 + y^2 = 2 \quad (15a)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4} \quad (15b)$$

19. Sporządź naturalny splajn kubiczny na podstawie danych zawartych w pliku <http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/dane.txt>. Przedstaw graficznie punkty danych i znaleziony splajn.
20. Stosując metodę Brenta znajdź minimum funkcji skonstruowanej w poprzednim zadaniu (znalezionego splajnu!), startując z losowo wybranej pary bliskoleżących punktów z przedziału $[-1.5 : 1.5]$; użyj tej pary to znalezienia trójki punktów wstępnie otaczających minimum. Powtórz zadanie dla kilkunastu różnych par punktów początkowych.
- 21 O. Znajdź numerycznie (analitycznie zrobić można to bardzo łatwo) minimum funkcji Rosenbrocka (zobacz rysunek)



$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2. \quad (16)$$

Rozpocznij poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacuj, ile trzeba kroków aby zbliżyć się do minimum narozsądną odległość. Przedstaw graficznie drogę, jaką przebywa algorytm poszukujący minimum (to znaczy pokaż położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

- 22*. Startując z kilku losowo wybranych punktów początkowych, spróbuj numerycznie znaleźć minima *czterowymiarowej* funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2 + 100(x_3 - x_2^2)^2 + 100(x_4 - x_3^2)^2. \quad (17)$$

23. Startując ze 128 punktów początkowych, rozmieszczonych losowo w kwadracie $[-3, 3] \times [-3, 3]$, znajdź minima funkcji

$$f(x, y) = 0.25x^4 + y^2 - 0.5x^2 + 0.125x + 0.0625(x - y) \quad (18)$$

24. Dopasuj wielomiany niskich stopni do danych zawartych w pliku <http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/w.txt>, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike, jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - w(x_i))^2, \quad (19)$$

gdzie (x_i, y_i) oznaczają punkty pomiarowe, N jest liczbą pomiarów, $w(x)$ dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów (czyli współczynników dopasowanego wielomianu).

Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicite znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.

25. Znajdź przybliżenia Padé R_{40} , R_{31} , R_{22} , R_{13} , R_{04} funkcji

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad x \in (-1, 1) \quad (20)$$

Sporządź ich wykresy, oraz wykres samej funkcji (20), w przedziale $[-0.5, 0.5]$.

Wskazówka: *Use Mathematica, Luke!*