

Wstęp do metod numerycznych
Dyskretna transformacja Fouriera

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2012

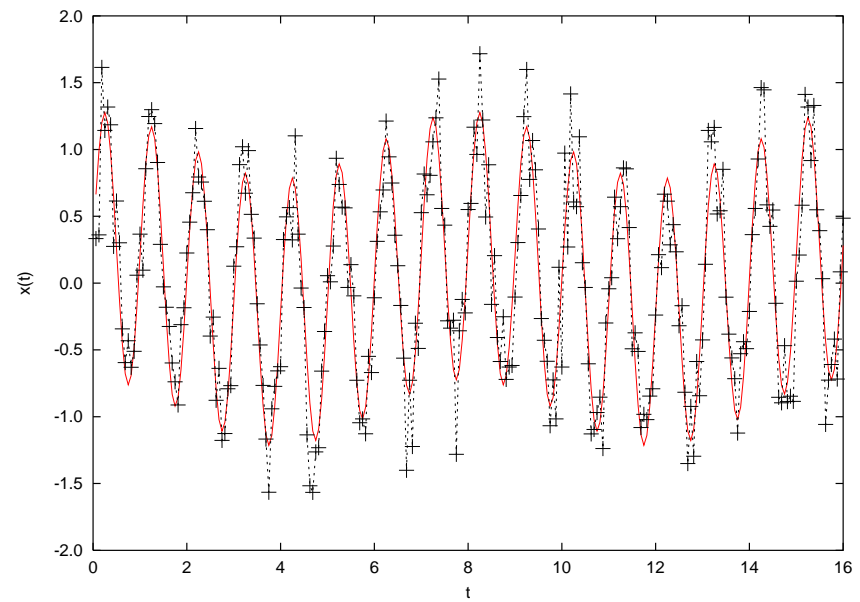
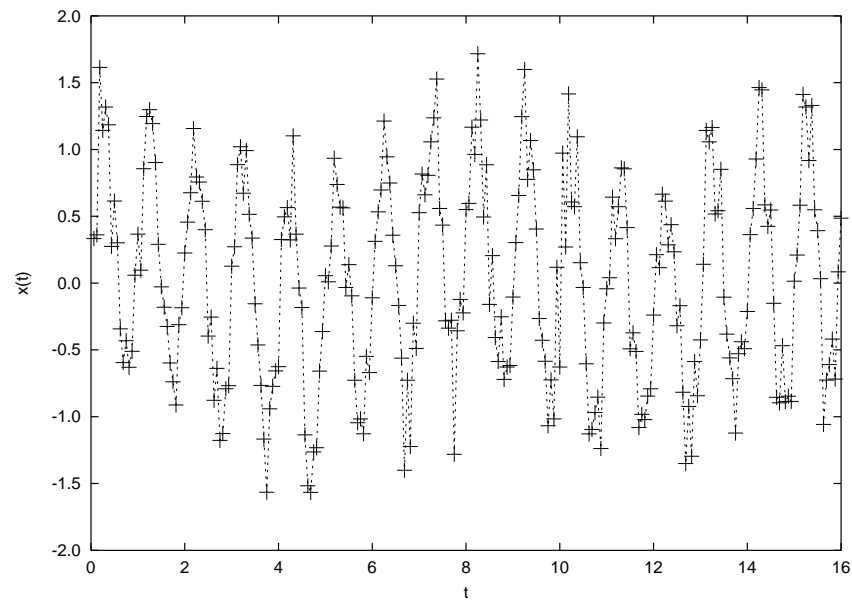
Problem

Mając dany szereg czasowy

$$\{x_i\}_{i=1}^N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

(zazwyczaj nieciekawy), zdobądź informację na temat *mechanizmu* odpowiedzialnego za wygenerowanie tego szeregu (co może być interesujące).

Przykład 1



Po owocach jego poznacie go.

Próbkowanie

Nie zajmujemy się sygnałami ciągłymi, ale sygnałami, które zostały *spróbko-*
wane z pewnym stałym krokiem:

$$g_n = g(n\Delta), \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Proces próbkowania wprowadza pewną częstotliwość charakterystyczną, zwaną częstotliwością Nyquista:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2\Delta}. \quad (2)$$

Uwaga: Jeśli chcemy rozpoznać falę harmoniczną, należy ją spróbkować (co najmniej) *dwa razy* w każdym okresie. Jeśli próbkujemy z krokiem Δ , możemy rozpoznać częstotliwości $f \in [-f_{\text{Nyq}}, f_{\text{Nyq}}]$.

Dodatnie i ujemne częstotliwości

Jeśli dopuszczamy dodatnie i ujemne częstotliwości, $e^{+2\pi i f t}$, $e^{-2\pi i f t} = e^{+2\pi i (-f)t}$, możemy odróżnić $\sin 2\pi f t$ od $\cos 2\pi f t$, które mają taką samą **częstotliwość**, ale różnią się **fazą**.

Twierdzenie Shannona-Kotelnikowa o próbkowaniu

Pytanie: Kiedy możemy próbować lub też pod jakimi warunkami dyskretne próbki dadzą tę samą informację, co funkcja o argumencie ciągłym?

Theorem: Jeśli funkcja $g(t)$ jest *pasmowo ograniczona*, czyli gdy zawiera tylko częstotliwości z przedziału $[-f_{Nyq}, f_{Nyq}]$, i gdy mamy *nieskończony* szereg próbkowany z krokiem Δ , wówczas

$$\forall t: \quad g(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \frac{\sin(2\pi f_{Nyq}(t - n\Delta))}{\pi(t - n\Delta)}. \quad (3)$$

Szum (procesy stochastyczne) i funkcje nieciągłe (zawierające skoki) *nie są* pasmowo ograniczone.

Aliasy

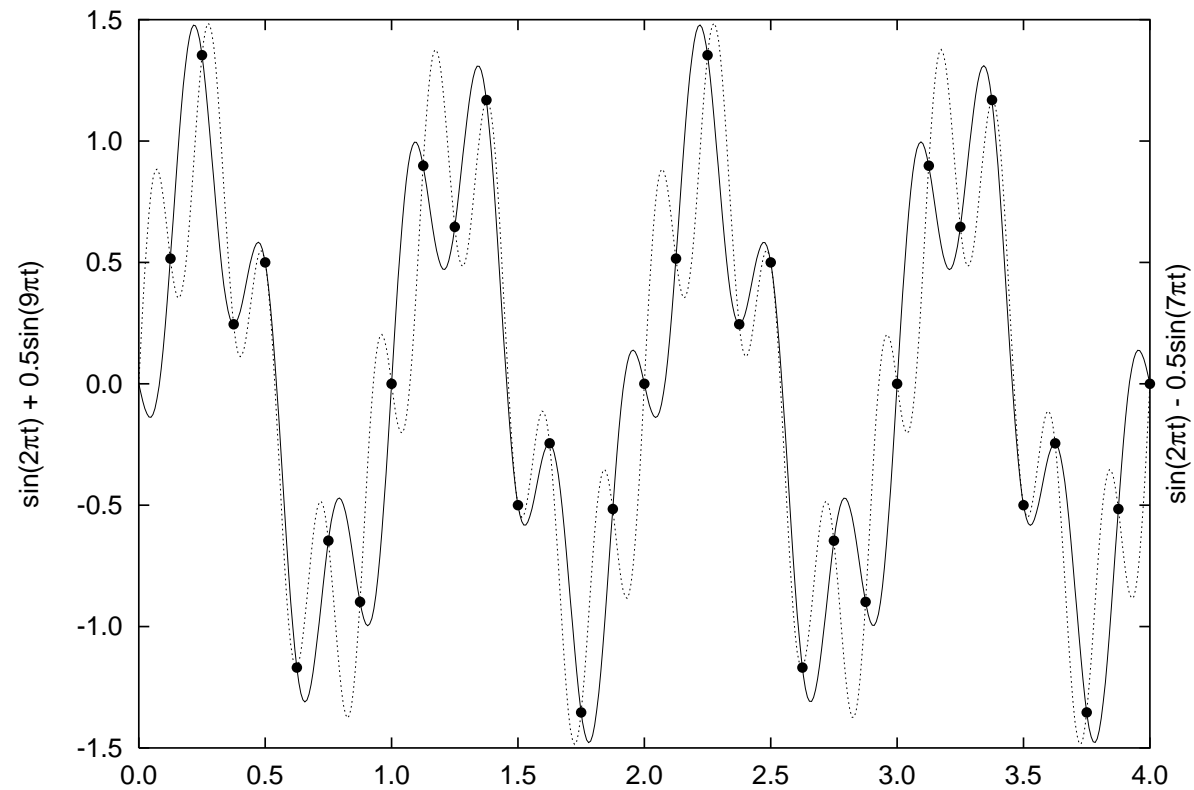
Jeśli w sygnale są częstotliwości spoza przedziału $f \notin [-f_{\text{Nyq}}, f_{\text{Nyq}}]$, nie tylko są one tracone, ale także psują one informację o częstotliwościach z przedziału Nyquista.

Rozważmy dwie fale harmoniczne $\exp(2\pi i f_1 t)$, $\exp(2\pi i f_2 t)$ takie, że $f_1 - f_2 = k/\Delta$. Wówczas

$$\begin{aligned}\exp(2\pi i f_1 n \Delta) &= \exp(2\pi i (f_2 + k/\Delta) n \Delta) \\ &= \exp(2\pi i f_2 n \Delta + 2\pi i k n) = \exp(2\pi i f_2 n \Delta).\end{aligned}$$

Takie fale dają *identyczne* próbki, jeśli próbkować je z krokiem Δ .

Example 2



Częstotliwość $9/2$ zostanie *falszywie* zinterpretowana jako $7/2$.

Transformacja Fouriera

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{2\pi ift} dt \quad (4)$$

Funkcja musi znikać dostatecznie szybko dla $t \rightarrow \pm\infty$ aby transformacja Fouriera istniała.

Transformacja odwrotna:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{-2\pi ift} df \quad (5)$$

Trzeba zapamiętać gdzie umieścić 2π , jest kilka różnych konwencji.

Własności transformacji Fouriera

Splot:

$$(g \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (6a)$$

$$g \star h \leftrightarrow G(f)H(f) \quad (6b)$$

Funkcja korelacji:

$$\text{Corr}(g, h) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + t)h(t) d\tau \quad (7a)$$

$$\text{Corr}(g, h) \leftrightarrow G(f)H^*(f) \quad (7b)$$

Twierdzenie Wienera-Chinczyna

Funkcja korelacji:

$$\text{Corr}(g, g) \leftrightarrow |G(f)|^2 \quad (8)$$

Tożsamość Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \text{całkowita moc} \quad (9)$$

Skończone szeregi czasowe

Twierdzenie o próbkowaniu wymaga nieskończonego szeregu czasowego. W rzeczywistości mamy dane jedynie szeregi skończone, o pewnej długości N . Stosowane są dwie konwencje:

- Zakładamy, że wyrazy szeregu na obu końcach dążą do zera (jeśli trzeba, mnożymy szereg przez odpowiednią funkcję okna) i są tożsamościowo równe zero przed zarejestrowanym początkiem i po zarejestrowanym końcu.
- Zakładamy, że zaobserwowany szereg skończony jest okresem nieskończonego szeregu okresowego. (W tej konwencji sinus i kosinus mają transformaty Fouriera.)

Przyjmujemy tą drugą konwencję i **udajemy**, że szereg ma postać

$$\dots, \underbrace{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{N-1}}_{\text{kopia } -1}, \underbrace{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{N-1}}_{\text{prawdziwe dane}}, \underbrace{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{N-1}}_{\text{kopia } +1}, \dots \quad (10)$$

Ponieważ mamy N (przyjmijmy, że jest to liczba parzysta) próbek wejściowych, dyskretna transformacja Fouriera (*Discrete Fourier Transform*, DFT) może być obliczana tylko w N punktach. Decydujemy, że DFT obliczamy tylko dla częstotliwości

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (11)$$

Dyskretna transformacja Fouriera

$$\begin{aligned} G(f_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{2\pi i f_n t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{s=-M}^M \int_{(s-1)\Delta}^{s(N-1)\Delta} g(t) e^{2\pi i f_n t} dt = \int_0^{(N-1)\Delta} g(t) e^{2\pi i f_n t} dt \\ &\simeq \sum_{k=0}^{N-1} \Delta g_k e^{2\pi i f_n t_k} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{2\pi i k n / N}. \end{aligned} \quad (12)$$

Liczby

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{2\pi i k n / N} \quad (13)$$

nazywamy *dyskretnymi składowymi Fourierowskimi* funkcji g . Transformacja odwrotna ma postać

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{-2\pi i k n / N}. \quad (14)$$

Dyskretna tożsamość Parsewala:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |g_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |G_n|^2. \quad (15)$$

DFT jako transformacja liniowa

Równanie (13) można przepisać w postaci

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} W_{nk} g_k, \quad (16a)$$

$$W_{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i kn/N}. \quad (16b)$$

Liczby W_{nk} można interpretować jako elementy pewnej macierzy. Wobec tego (16) można zapisać w zwartej postaci w następujący sposób:

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{g}, \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{G}, \mathbf{g} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Jaka jest złożoność obliczenia DFT? Wydaje się, że jest to koszt pomnożenia wektora przez macierz, a więc $O(N^2)$.

Własności macierzy \mathbf{W}

$$\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^\dagger\right)_{ls} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{W}_{lk} \left(\mathbf{W}^\dagger\right)_{ks} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{W}_{lk} \left(\mathbf{W}_{sk}\right)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i(l-s)k/N} \quad (18)$$

Jeżeli $l = s$, wszystkie wyrazy równają się 1, więc wynikiem jest 1. Jeżeli $l - s = m \neq 0$,

$$\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^\dagger\right)_{ls} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{2\pi im/N}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{2\pi im/N}\right)^N}{N(1 - e^{2\pi im/N})} = \frac{1 - e^{2m\pi i}}{N(1 - e^{2\pi im/N})} = 0. \quad (19)$$

$$\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^\dagger\right)_{ls} = \delta_{ls}.$$

Macierz \mathbf{W} jest *macierzą unitarną*.

Podsumowanie

DFT jest, z dokładnością do normalizacji, unitarnym przekształceniem *wektora próbek* na *wektor składowych Fourierowskich*.

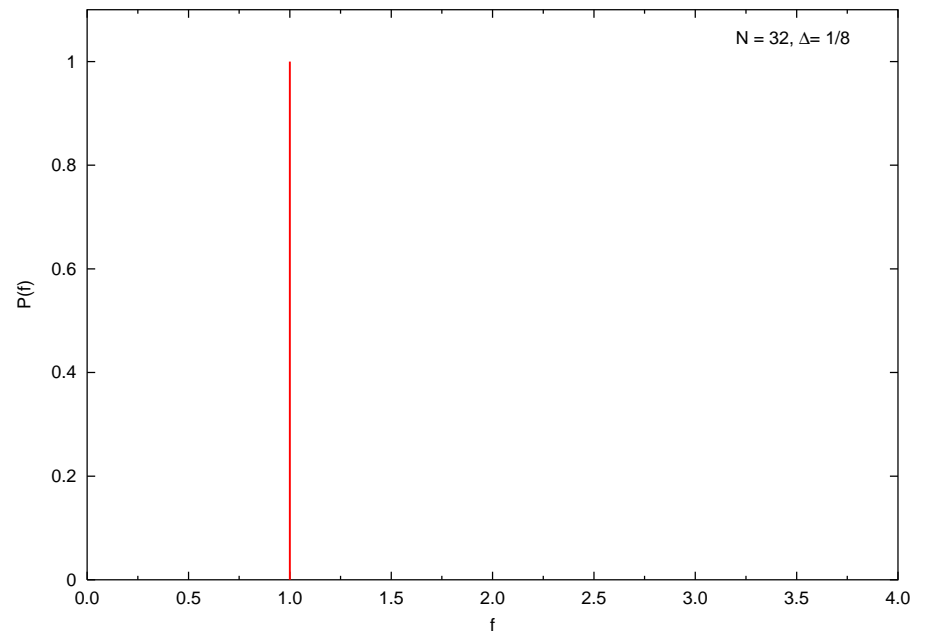
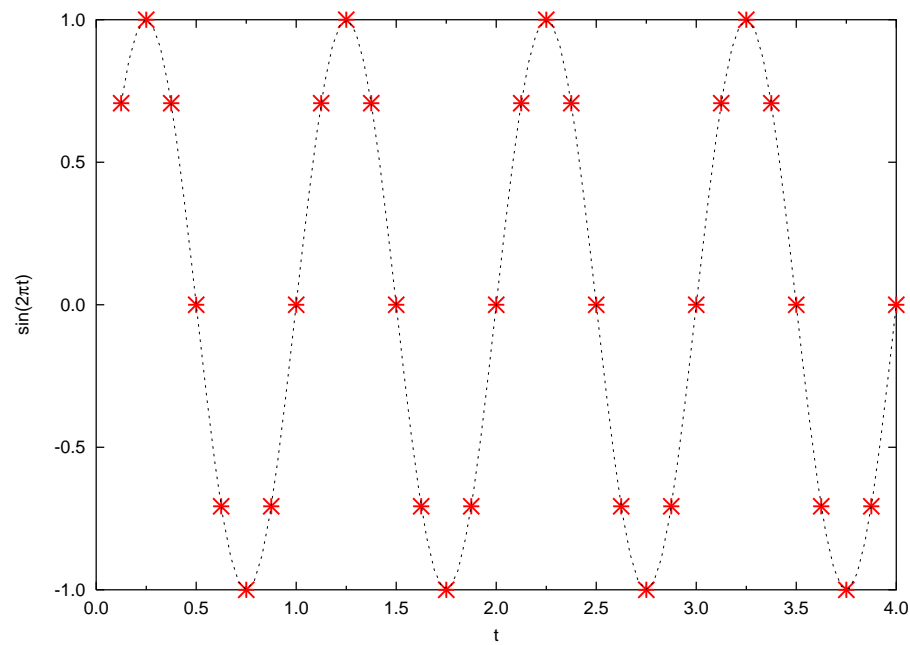
DFT przedstawia wektor próbek w innej bazie, a mianowicie w bazie rozpinanej przez zdyskretyzowane sinusy i kosinusy o częstotliwościach $0, 1/(N\Delta), 2/(N\Delta), \dots, 1/(2\Delta)$.

Dzięki symetriom macierzy \mathbf{W} , złożoność obliczeniowa DFT może być *znacznie* zmniejszona (FFT).

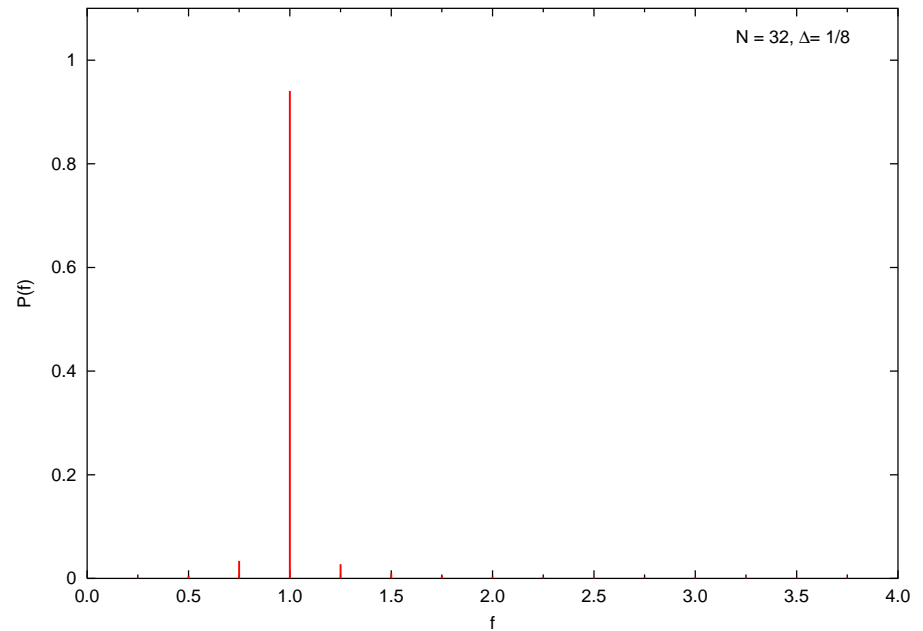
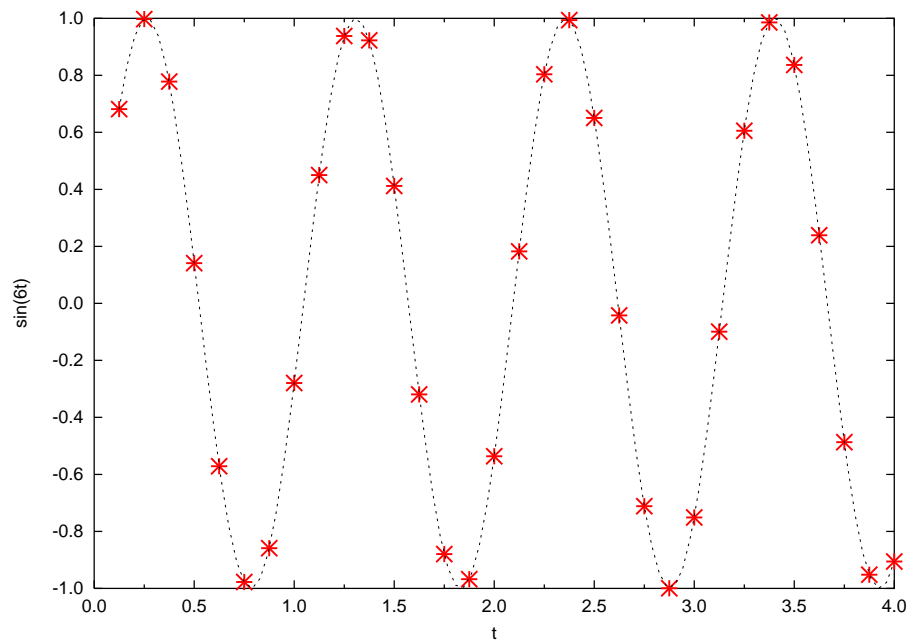
Uwagi

- Dyskretne składowe Fourierowskie są okresowe. W szczególności, $G_{-N/2} = G_{N/2}$.
- Używa się także transformacji rozpiętych na samych sinusach bądź kosinusach (transformacje jednostronne).
- “Sygnał” może być zespolony. Jeśli sygnał jest rzeczywisty, wygodnie jest obliczać jego transformatę, traktując go jako sygnał zespolony o połówkowej długości. Wygodnie jest także jednocześnie obliczać transformatę dwu sygnałów rzeczywistych, traktowanych jako część rzeczywista i urojona sygnału zespolonego. W obu wypadkach symetrie DFT pozwalają zidentyfikować co jest transformacją czego.

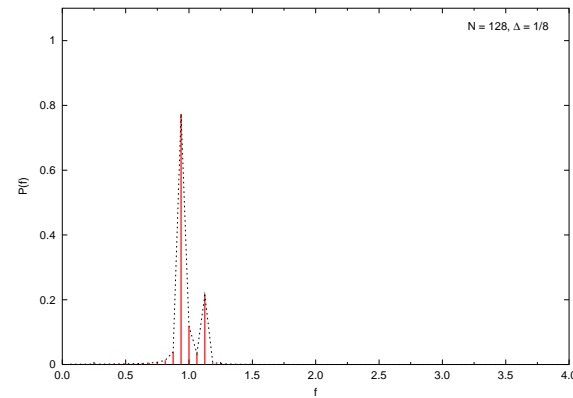
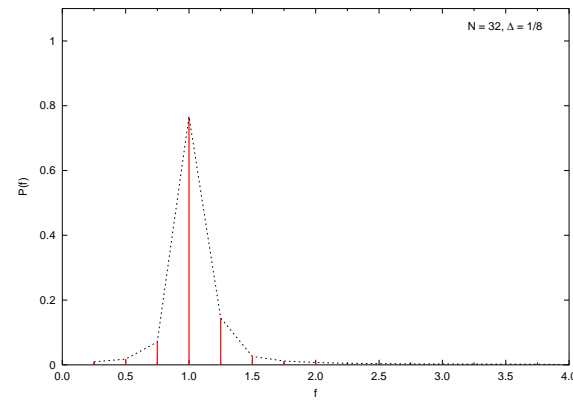
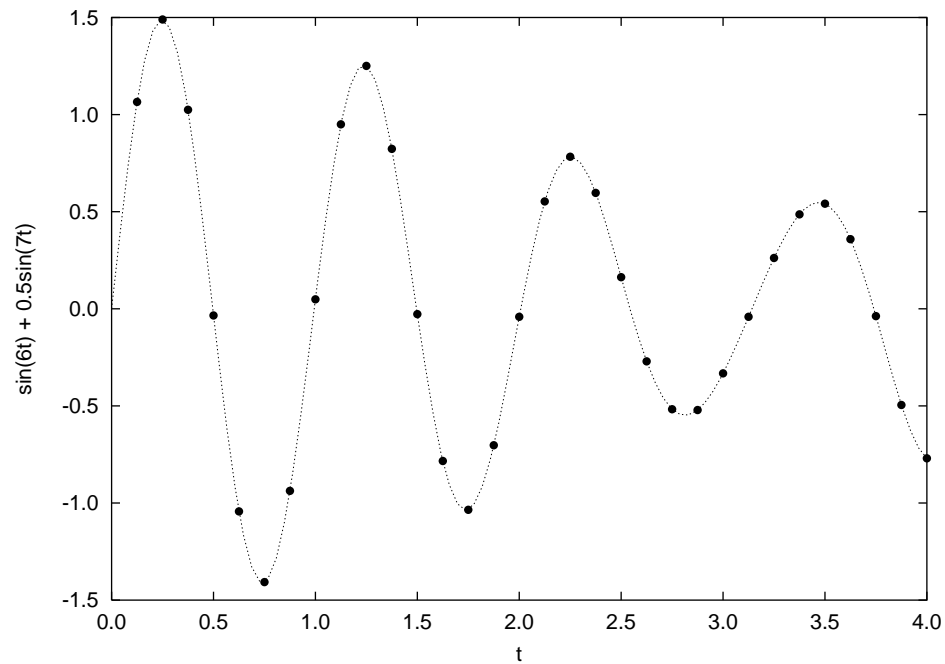
Transformata sygnału pokrywającego się z jednym z sygnałów bazowych



Transformata czystego sygnału harmonicznego, który *nie* pokrywa się z pojedynczym sygnałem bazowym



Zwiększanie liczby próbek bez zmiany kroku próbkowania zwiększa rozdzielczość



Macierz Vandermonde'a

Macierz DFT jest szczególnym przypadkiem macierzy Vandermonde'a $\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{V}^{(N)} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, gdzie

$$\mathbf{V}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{N-2} & z_{N-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \cdots & z_{N-2}^2 & z_{N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_0^{N-1} & z_1^{N-1} & \cdots & z_{N-2}^{N-1} & z_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

W wypadku DFT, $z_k = \exp(2\pi i k/N)$.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (*Fast Fourier Transform, FFT*)

Przedyskutujmy to na przykładzie $N = 8$

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{V}^{(8)}}{\sqrt{8}} \mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Widać pewne wzorce, ale trudno jest dostrzec *symetrie*.

Spermutujmy kolumny macierzy i wiersze wektora próbek tak, aby nie zmienić wyniku:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & i & -i & i & -i \\ 1 & -i & -1 & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -i & i & -i & i \\ 1 & -i & -1 & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_6 \\ g_1 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_7 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Teraz zaczynamy coś widzieć!

Przepiszmy równanie (22) w następującej notacji blokowej

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(4)} & \boldsymbol{\Omega}^{(4)}\mathbf{V}^{(4)} \\ \mathbf{V}^{(4)} & -\boldsymbol{\Omega}^{(4)}\mathbf{V}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_6 \\ g_1 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_7 \end{bmatrix} \quad (23)$$

...gdzie

$$\mathbf{V}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{\Omega}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^0 & & & \\ & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^1 & & \\ & & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 & \\ & & & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

A zatem

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\begin{array}{l} \mathbf{V}^{(4)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_6 \end{bmatrix} + \Omega^{(4)} \mathbf{V}^{(4)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}^{(4)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_6 \end{bmatrix} - \Omega^{(4)} \mathbf{V}^{(4)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_7 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (26)$$

Fragmenty o różnych kolorach obliczane są tylko raz. Mnożenie przez $\Omega^{(4)}$ zachodzi w czasie liniowym. Zredukowaliśmy całkowitą liczbę operacji *o połowę*.

Kluczowa obserwacja: $\mathbf{V}^{(4)}$ można sfaktoryzować w podobny sposób, z jednoczesną permutacją wektora wejściowego:

$$\mathbf{V}^{(4)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(2)} & \mathbf{\Omega}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)} \\ \mathbf{V}^{(2)} & -\mathbf{\Omega}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_4 \\ g_2 \\ g_6 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^0 & \\ & i^1 \end{bmatrix}$$

(podobnie dla $[g_1, g_3, g_5, g_7]^T$)

Zatem

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_4 \end{bmatrix} + \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_4 \end{bmatrix} - \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_6 \end{bmatrix} \end{array} \right] + \Omega^{(4)} \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_5 \end{bmatrix} + \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_5 \end{bmatrix} - \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_7 \end{bmatrix} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_4 \end{bmatrix} + \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_4 \end{bmatrix} - \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_6 \end{bmatrix} \end{array} \right] - \Omega^{(4)} \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_5 \end{bmatrix} + \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_5 \end{bmatrix} - \Omega^{(2)} \mathbf{V}^{(2)} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_7 \end{bmatrix} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (28)$$

Wektory dwuwymiarowe o różnych kolorach obliczane są tylko raz. Zmniejszy-
liśmy liczbę operacji *czterokrotnie*.

Ostatnia zagadka

Dokonałiśmy następującej permutacji wektora wejściowego

$$[g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7]^T \rightarrow [g_0, g_4, g_2, g_6, g_1, g_5, g_3, g_7]^T.$$

Czy taką permutację łatwo jest zaimplementować?

0	=	000 ₂	→	000 ₂	=	0
4		100 ₂		001 ₂		1
2		010 ₂		010 ₂		2
6		110 ₂		011 ₂		3
1	=	001 ₂	odwróć kolejność	100 ₂	=	4
5		101 ₂		101 ₂		5
3		011 ₂		110 ₂		6
7		111 ₂		111 ₂		7

(29)

Wejściowy wektor został zapisany w odwrotnej kolejności bitowej indeksów.

Ten algorytm łatwo można uogólnić dla każdego $N = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$.

Nie trzeba obliczać członów postaci $\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)$, $\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)$ — nie trzeba wołać funkcji bibliotecznych $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$. Na każdym etapie faktoryzacji *tylko jeden raz* obliczany jest pierwiastek odpowiedniego stopnia z i , na co są gotowe wzory. Następnie oblicza się tylko kolejne potęgi tego pierwiastka.

Jaki jest więc końcowy koszt numeryczny?

Każda faktoryzacja zmniejsza liczbę operacji o połowę.

Jest $\log_2 N$ faktoryzacji.

Złożoność obliczeniowa algorytmu FFT wynosi

$$O(N \log_2 N)$$

Na przykład, dla $N = 65536 = 2^{16}$, algorytm FFT zmniejsza koszt obliczeniowy wyliczenia DFT ponad *cztery tysiące razy*.

Uwagi

- Podobne algorytmy można skonstruować dla $N = 3^s$, $N = 5^s$ i, w ogólności, dla każdego $N = q^s$, gdzie q jest liczbą pierwszą. Ich złożoność obliczeniowa wynosi $O(N \log_q N)$.
- Dobre biblioteki automatycznie faktoryzują macierze o rozmiarach $N = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_m^{s_m}$, gdzie q_1, q_2, \dots, q_m są niewielkimi liczbami pierwszymi.
- Jeśli analizujemy szereg, którego wyrazy *obliczamy*, możemy kontrolować jego długość i *powinniśmy* zadbać, aby była ona potęgą niewielkiej liczby pierwszej. Jeśli analizujemy szereg “doświadczalny”, rozsądnie jest go albo obciąć, albo wypełnić zerami, tak, aby długość była potęgą niewielkiej liczby pierwszej.
- Istnieją także “szybkie” algorytmy obliczania transformat jednostronnych (sinusowej i kosinusowej).
- Na sieci dostępnych jest *wiele* pakietów obliczających FFT. Niektóre z nich są dobre. Ja polecam The Fastest Fourier Transform in the West, <http://www.fftw.com>.