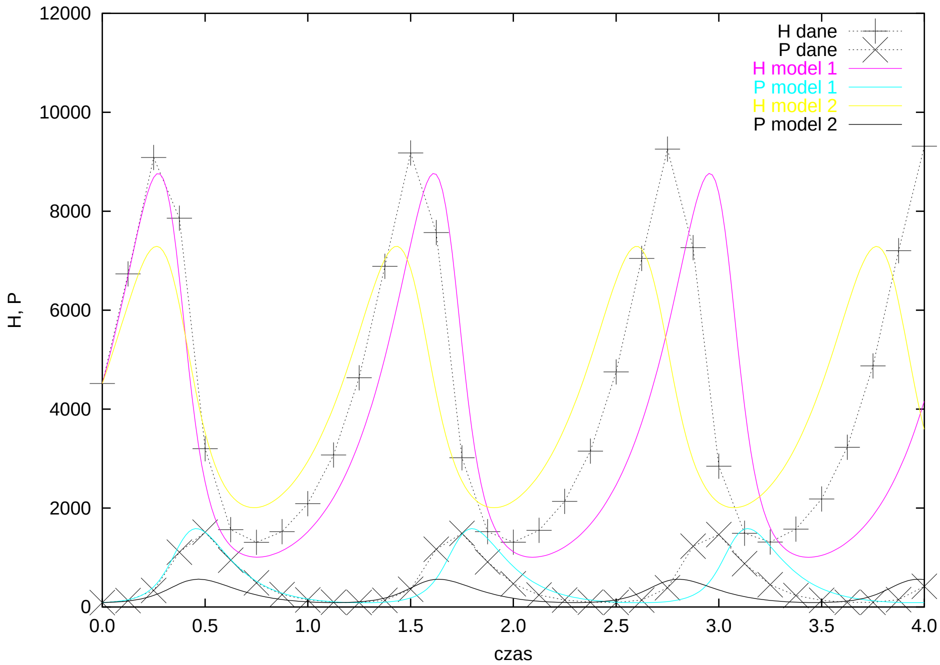
1. Pewna populacja ofiar (H) i drapieżników (P) opisana jest za pomocą równań Lotki-Volterry:

$$\frac{dH}{dt} = rH - aHP \tag{1a}$$
$$\frac{dP}{dt} = bHP - mP \tag{1b}$$

Wielkości r, a, b, m są parametrami modelu. Poniższy rysunek przedstawia "doświadczalne" wartości H, P oraz krzywe całkowe równań (1), obliczone dla jakichś odgadniętych wartości parametrów:



Nie umiemy podać analitycznych rozwiązań równań (1), umiemy jednak rozwiązywać te równania numerycznie. Zakładając, że wartości "doświadczalne" są dane, zaproponować *metodę* dopasowania parametrów r, a, b, m do danych "doświadczalnych" oraz *znalezienia macierzy kowariancji* estymatorów. Przyjąć, że dane "doświadczalne" obarczone są jakimiś znanymi błędami.

2N. Rozwiązać numerycznie powyższy problem, korzystając z danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum08/lv0.txt` (pierwsza kolumna oznacza czas, druga H, trzecia P). Jako warunki początkowe przyjąć podane w pliku wartości $H(0)$, $P(0)$. Założyć, że dane "doświadczalne" obarczone są błędami wynoszącymi 0.5% "zmierzonych" wartości. Podać, jaką metodą całkowane były równania różniczkowe i jak wybór metody wpływa na jakość dopasowania parametrów.

3N. Rozpatrzmy układ składający się z trzech punktów. Dwa z nich mogą poruszać się bez tarcia po poziomych liniach odległych o $2l$. Punkty te połączone są z punktem środkowym za pomocą sztywnych, nieważkich prętów o takich samych długościach $r > l$. Połączenia są przegubowe i pręty mogą się w połączeniach swobodnie obracać. Na „górny" punkt działa pozioma siła zewnętrzna $F_1 = \sin(2\pi t)$, na „dolny" punkt działa pozioma siła zewnętrzna $F_3 = \sin(4\pi t)$. W chwili początkowej punkty „górny" i „dolny" spoczywają w punktach o takich samych współrzędnych horyzontalnych. Znaleźć trajektorię środkowego punktu. W obliczeniach przyjąć $r = 1.25l$, $l = 1$. Masy wszystkich punktów są takie same, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Wynik przedstawić graficznie. (Wskazówka: Wykład 9, równania (6).)

4. Rozpatrujemy płaskie zagadnienie trzech ciał oddziałujących grawitacyjnie. Dwa pierwsze (ozn. 1,2) ciała mają masę M, trzecie (ozn. 3) ciało ma masę $m < M$. Warunki początkowe są takie, iż ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie. Energia potencjalna grawitacji ma postać:

$$U = -\frac{GM^2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}} - \frac{GMm}{\sqrt{(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2}} - \frac{GMm}{\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2}}. \tag{2}$$

Energia kinetyczna ma postać

$$T = \tfrac{1}{2}M(v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2) + \tfrac{1}{2}m(v_{x_3}^2 + v_{y_3}^2)\,. \tag{3}$$

Wielkością zachowywaną jest (między innymi!) całkowita energia układu $E = T + U$.

Wyprowadzić równania ruchu opisujące ewolucję tego układu w postaci układu równań pierwszego rzędu. Wyprowadzić wyrażenie na funkcję rzutującą na hiperpowierzchnię stałej energii.

5N. Rozwiązać powyższe zadanie numerycznie, przyjmując $G = 1$, $M = 1000$, $m = 1$ oraz następujące warunki początkowe: położenia: $x_1 = 0$, $y_1 = -100$, $x_2 = 0$, $y_2 = 100$, $x_3 = 80$, $y_3 = -10$, prędkości: $v_{x_1} = 1$, $v_{y_1} = 0$, $v_{x_2} = -1$, $v_{y_2} = 0$, $v_{x_3} = -1$, $v_{y_3} = 1$. Znaleźć trajektorię trzeciego (lekkiego) ciała w przedziale $0 \leqslant t \leqslant 700$ (t oznacza zmienną niezależną) za pomocą

(a) klasycznej czterokrokowej metody Rungego-Kutty,

(b) metody *velocity Verlet*,

(c) algorytmu Candy-Rozmusa,

(d) algorytmu rzutującego na hiperpowierzchnię stałej energii.

Sprawdzić, jak w każdym z tych algorytmów zmienia się całkowita energia układu. Przyjąć krok czasowy równy $1/4096$ (wyniki można wyprowadzać z większym krokiem). Wyniki przedstawić graficznie.

PFG