1N. Za pomocą metody Bulirscha-Stoera znaleźć w przedziale $[0, 16]$ rozwiązanie równania

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \tag{1}$$

spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Rozwiązanie przedstawić graficznie.

2. Wyprowadzić zmiennokrokową metodę Adamsa-Bashfortha postaci[1]

$$y_{n+1} = y_n + h_n A_n f(x_n, y_n) + h_n B_n f(x_{n-1}, y_{n-1}) \,, \tag{2}$$

gdzie $x_n - x_{n-1} = h_{n-1}$, $x_{n+1} - x_n = h_n = \alpha_n h_{n-1}$, f jest „prawą stroną” standardowego problemu Cauchy’ego. Określić rząd tej metody i znaleźć jej obszar stabilności.

3*. Wyprowadzić zmiennokrokową metodę Adamsa-Bashfortha postaci[2]

$$y_{n+1} = y_n + h_n A_n f(x_n, y_n) + h_n B_n f(x_{n-1}, y_{n-1}) + h_n C_n f(x_{n-2}, y_{n-2}) \,, \tag{3}$$

gdzie $x_{n-1} - x_{n-2} = h_{n-2}$, $x_n - x_{n-1} = h_{n-1} = \alpha_{n-1} h_{n-2}$, $x_{n+1} - x_n = h_n = \alpha_n h_{n-1}$, f jest „prawą stroną” standardowego problemu Cauchy’ego. Określić rząd tej metody i znaleźć jej obszar stabilności.

4. Przedyskutować *jakościowo* rozwiązania równania[3]

$$\ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0 \tag{4}$$

dla $t \gg 0$. Wskazówka: Rozpatrzyć zachowanie funkcji $V(x, \dot{x}) = 2\dot{x}^2 + x^4$.

5N. Rozwiązać numerycznie, dowolnie wybraną metodą, powyższy problem dla kilku wybranych warunków początkowych. Wyniki przedstawić graficznie.

6N. Rozwiązać numerycznie problem Cauchy’ego

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d^2y}{dx^2} & = & -\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 x \,, \\ y(-1) & = & 0 \,, \\ y'(-1) & = & 1 \end{array} \right. \tag{5}$$

w przedziale $[-1, 1]$ używając

(a) jawnej metody punktu środkowego (Runge-Kutta),

(b) niejawnej metody punktu środkowego (Runge-Kutta),

(c) metody Adamsa-Bashfortha rzędu drugiego,

(d) metody predyktor-korektor rzędu drugiego z jednym krokiem korektora,

(e) metody predyktor-korektor rzędu drugiego z dwoma krokami korektora,

(f) medoty Adamsa-Moultona rzędu drugiego,

(g) zmodyfikowanej metody *velocity Verlet*.

Do inicjalizacji metod wielokrokowych użyć odpowiedniej (jawnej lub niejawnej) metody punktu środkowego. Wyniki przedstawić graficznie. Użyć następujących kroków:

[1] Dla uproszczenia stosuję notację skalarną.
[2] Patrz poprzedni przypis.
[3] Zadanie to było już rozwiązane na ćwiczeniach, ale dla porządku podaję je tutaj.

(a) $h = 1/8$,
(b) $h = 1/128$,
(c) $h = 1/1024$.

7N. Za pomocą klasycznej, czterokrokowej metody Rungego-Kutty z podwajaniem/połowieniem kroku rozwiązać problem Cauchy'ego

$$\dot{x} = 1007x + 2007y + \cos(x-y) \tag{6a}$$
$$\dot{y} = -1008x - 2008y - \cos(x-y) \tag{6b}$$

w przedziale $[0, 16]$. Przyjąć $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Jakie ograniczenie na krok trzeba przyjąć? Z czego one wynikają?

8N. Za pomocą klasycznej, czterokrokowej metody Rungego-Kutty z podwajaniem/połowieniem kroku lub za pomocą którejś zagnieżdżonej metody Rungego-Kutty rozwiązać w przedziale $[0, 4]$ problem

$$\dot{x} = \frac{1 - xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{7a}$$
$$\dot{y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{7b}$$
$$\dot{z} = \frac{2z - x - y}{x^3 + y^3 + z^2} \tag{7c}$$

Przyjąć $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

9N*. Za pomocą *kilku* różnych metod rozwiązać w przedziale $[0, 360]$ problem

$$\dot{x} = s(y - xy + x - qx^2) \tag{8a}$$
$$\dot{y} = \frac{1}{s}(-y - xy + fz) \tag{8b}$$
$$\dot{z} = w(x - z) \tag{8c}$$

Przyjąć następujące wartości stałych: $f = 1$, $s = 77.27$, $w = 0.161$, $q = 8.375 \cdot 10^{-6}$. Przyjąc warunki początkowe $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$. Uwaga! Wartości parametrów mają być takie, jak podane powyżej.

Jest to słynny *Oregonator*.

PFG