1. Znaleźć rzędy i *analityczne* wyrażenia na współczynnik wzmocnienia podanych niżej metod Rungego–Kutty.

Jawna metoda punktu środkowego:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \tag{1a}$$

Niejawna metoda punktu środkowego:
$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \tag{1b}$$

Jawna metoda trapezowa:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{1c}$$

Niejawna metoda trapezowa:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{1d}$$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{1e}$$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{1f}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{1g}$$

Klasyczna czterokrokowa:
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{1h}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
\tag{1i}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}
\tag{1j}
$$

Metoda Gilla:
$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
\tag{1k}
$$

2N. Znaleźć — jeśli trzeba, numerycznie — obszary stabilności wszystkich powyższych metod. Wyniki przedstawić graficznie. Uwaga: Proszę *uważnie* przyjżeć się wyrażeniom analitycznym otrzymanym w poprzednim zadaniu.

3. Jak rząd i obszar stabilności następującej metody zależą od parametru α?

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\frac{1}{4\alpha} & \frac{1}{4\alpha} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\alpha & \alpha
\end{array}
\tag{2}
$$

4. Znaleźć rzędy i analityczne wyrażenia określające obszary stabilności następujących metod DIRK (*Diagonally Implicit Runge-Kutta*):

$$
\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
, \qquad \gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6}
\tag{3a}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
1 & 1-\gamma & \gamma \\
\hline
 & 1-\gamma & \gamma
\end{array}\,, \qquad \gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \tag{3b}
$$

5N. Znaleźć obszary stabilności następujących dwu metod Rungego-Kutty oraz sprawdzić, że metody te są co najmniej czwartego rzędu (para Fehlberga):

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & 0
\end{array} \tag{4a}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array} \tag{4b}
$$

Puste miejsca oznaczają zera.

6N. Znaleźć obszary stabilności następujących dwu metod Rungego-Kutty oraz sprawdzić, że metody te są co najmniej czwartego rzędu (para Dormanda-Prince'a):

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & \\
\frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{54448}{6561} & -\frac{212}{729} & & & \\
1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & \\
1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & \\
\hline
 & \frac{5179}{57600} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & -\frac{92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40}
\end{array} \tag{5a}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & \\
\frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{54448}{6561} & -\frac{212}{729} & & & \\
1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & \\
1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & \\
\hline
 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & 0
\end{array}
\tag{5b}
$$

7. Napisać *jak najbardziej efektywne* procedury realizujące klasyczną metodę czterokrokową (1h) i metodę Gilla (1k).

8. Jaki krok należy wziąć, aby za pomocą

   (a) metody Gilla

   (b) klasycznej czterokrokowej metody RK

   można było rozwiązywać równanie oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,. \tag{6}$$

PFG