

1. Dane jest równanie

$$\dot{x} + \lambda x = |x|^\alpha \sin \omega t, \quad (1)$$

gdzie $\lambda \geq 0, 0 < \alpha < 1$.

(a) Czy równanie to (a raczej problem Cauchy'ego z tym równaniem) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie?

(b) Używając podstawienia

$$y = x|x|^{-\alpha} \quad (2)$$

rozwiązać równanie (1).

(c) Czy podstawienie (2) jest poprawne?

(d) Sprawdzić rozwiązanie uzyskane w kroku 1b poprzez jawne podstawienie do równania (1).

2. Sprawdzić, czy

(a) jawna metoda Eulera,

(b) niejawna metoda Eulera,

(c) jawna metoda punktu środkowego,

(d) niejawna metoda punktu środkowego,

(e) jawna metoda trapezowa

są stabilne w zastosowaniu do równania tłumionego oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3)$$

gdzie $\gamma \geq 0$. (Szczególnie interesujący jest przypadek słabego tłumienia, $0 \leq \gamma < 2|\omega|$.)

3. Rozważmy najprostszą wersję problemu Keplera:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = 0, \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ (ze względu na zachowanie momentu pędu, ruch ograniczony jest do dwóch wymiarów). Zakładamy, że $\mathbf{r}(0) \neq 0$ oraz $\dot{\mathbf{r}}(0) \not\parallel \mathbf{r}(0)$. Sprawdzić czy metody Eulera w zastosowaniu do tego problemu są stabilne.

4. Rozważmy następujący problem Cauchy'ego:

$$\frac{dy_1}{dx} = -16y_1 + 12y_2 + 16 \cos x - 13 \sin x, \quad (5a)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 12y_1 - 9y_2 - 11 \cos x + 9 \sin x, \quad (5b)$$

$$y_1(0) = 1, \quad (5c)$$

$$y_2(0) = 0. \quad (5d)$$

Proszę znaleźć jego *dokładne* rozwiązanie.

- 5N. Stosując jawną metodą Eulera z krokiem $h = \pi/n$, rozwiązać problem (5) w przedziale $0 \leq x \leq 10$ dla $n = 1, 2, \dots, 256$. Niech \tilde{y} oznacza *ściśle* rozwiązanie problemu (5), natomiast niech y_k oznacza otrzymane rozwiązanie numeryczne. Oznaczmy

$$E = \max_k \|\tilde{y}(x_k) - y_k\|, \quad (6)$$

a zatem maksimum popełnionego błędu numerycznego. Proszę sporządzić wykres E w funkcji n^{-1} . (Proszę się zastanowić nad rozsądnym wyborem skali osi.)

- 6N. Proszę powtórzyć powyższe zadanie dla

- (a) niejawnej metody Eulera,
- (b) jawnej metody punktu środkowego,
- (c) niejawnej metody punktu środkowego.

- 7N. Rozwiązać numerycznie problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

w przedziale $[-1, 1]$ używając

- (a) jawnej metody trapezowej,
- (b) niejawnej metody trapezowej w postaci predyktor-korektor z jednym krokiem korektora,
- (c) niejawnej metody trapezowej w postaci predyktor-korektor z dwoma krokami korektora,
- (d) niejawnej metody trapezowej.

Wyniki przedstawić graficznie. Użyć następujących kroków:

- (a) $h = 1/8$,
- (b) $h = 1/128$,
- (c) $h = 1/1024$.