1. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania tłumionego oscylatora harmonicznego z zewnętrznym wymuszeniem harmonicznym ($\gamma > 0$)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = A\cos\Omega t\,. \tag{1}$$

2. Znaleźć postać asymptotyczną (dla $t \gg 1$) powyższego rozwiązania oraz rozwiązanie szczególne, spełniające $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$. Czym różnią się te dwa rozwiązania?

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 2y = 0\,, \tag{2}$$

oraz rozwiązanie szczególne, spełniające $y(0) = (dy/dx)(0) = (d^2y/dx^2)(0) = 0$, $(d^3y/dx^3)(0) = 1$.

4. (a) Obliczyć

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t\right) \tag{3}$$

   (b) Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y && \text{(4a)} \\ \dot{y} &= y && \text{(4b)} \end{aligned}$$

   (c) Przekształcić układ równań pierwszego rzędu (4) w równanie drugiego rzędu na funkcję $x(t)$ i rozwiązać je.

5. Dane są <u>dwa</u> problemy Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0 \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$. $\mathbf{A}$ jest stałą, diagonalizowalną, nieosobliwą macierzą, taką samą w obu problemach Cauchy'ego. Oszacować $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|$.

6. Znaleźć punkty stacjonarne równania logistycznego

$$\dot{y} = ry(Y - y) \quad (r = \text{const} > 0,\ Y = \text{const} > 0) \tag{6}$$

oraz przedyskutować ich stacjonarność.

7. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania logistycznego (6), spełniające $y(0) = y_0 > 0$. Co by było, gdyby przyjąć $y_0 < 0$?

8. Znaleźć punkty stacjonarne równania Lotki-Volterry

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by) && \text{(7a)} \\ \dot{y} &= -y(c - dx) && \text{(7b)} \end{aligned}$$

gdzie a, b, c, d są stałymi dodatnimi, oraz przedyskutować ich stacjonarność. Co by się działo, gdyby przyjąć $b < 0$, $d < 0$?

verte

9. Przedyskutować *jakościowo* zachowanie rozwiązań równania

$$\ddot{x} + x^3 - x = 0 \tag{8}$$

w zależności od warunków początkowych. Wskazówki dla nie-fizyków: "Siła równa się minus gradient potencjału." W układach bez tłumienia energia jest zachowywana. (Fizycy, mam nadzieję, nie potrzebują wskazówek.)

10. Przedyskutować asymptotyczne ($t \gg 1$) zachowanie rozwiązań równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^4 - 1\right)\frac{dx}{dt} + x^3 = 0\,. \tag{9}$$

Przedyskutować stabilność uzyskanych rozwiązań. Wskazówka: To się *da* zrobić, bez konieczności jawnego konstruowania rozwiązań!

PFG