1. Udowodnić wszystkie twierdzenia ze stron 3–5 wykładu 3.

2. Udowodnić, że macierz
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$
jest niediagonalizowalna.

3. Znaleźć równanie charakterystyczne macierzy ($a_n \neq 0$)
$$\begin{bmatrix} -a_{n-1}/a_n & -a_{n-2}/a_n & -a_{n-3}/a_n & \cdots & -a_1/a_n & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. *Transformacja Householdera*. Niech $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, przy czym $\|\mathbf{w}\| = 1$. Znaleźć wartości i wektory własne operatora
$$\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T\,. \tag{3}$$
Jakie własności symetrii ma operator (3)?

5. Sprowadzić zagadnienie diagonalizacji macierzy hermitowskiej do zagadnienia diagonalizacji pewnej macierzy symetrycznej, rzeczywistej. Czy jest to procedura jednoznaczna? Czy wartości własne daje się wyznaczyć w sposób jednoznaczny? Czy wektory własne daje się wyznaczyć w sposób jednoznaczny?
Wskazówka: Niech $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ będzie macierzą hermitowską i niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ będzie jej wektorem własnym: $\mathbf{H}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Dokonać rozkładu macierzy i wektora własnego na części rzeczywiste i urojone, $\mathbf{H} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$.

6. *Transformacja Möbiusa*. Niech $\mathbf{A}$ będzie pewną macierzą i niech $\xi \in \mathbb{C}$ nie będzie elementem jej widma. Tworzymy rezolwentę $\mathbf{R} = (\mathbf{A} - \xi\mathbb{I})^{-1}$ ($\mathbb{I}$ oznacza macierz jednostkową).
   (a) Znaleźć związek pomiędzy wektorami i wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{R}$.
   (b) Przypuśćmy, że pewna ilość wartości własnych $\mathbf{A}$ spełnia zależności $\lambda_i = \xi + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \neq 0$, $|\varepsilon_i| \ll 1$ dla $i = l, l+1, \ldots, k$. Co można powiedzieć o odpowiadających im wartościach własnych $\mathbf{R}$?
   (c) Pokazać, że macierze $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{R}$ są jednocześnie symetryczne. Dla $\xi \in \mathbb{R}$ pokazać, że obie są jednocześnie hermitowskie.

7N. Dana jest macierz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Przy użyciu metody potęgowej znaleźć jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

8N. Przy użyciu odwrotnej metody potęgowej znaleźć najmniejszą na moduł wartość własną macierzy z zadania 7N.

9N. Spróbować zastosować metodę potęgową do macierzy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & -\frac{23}{12} \\ \frac{19}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{17}{12} & \frac{19}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{19}{12} & -\frac{17}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{19}{12} \\ -\frac{23}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & \frac{13}{12} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Czy uzyskuje się zbieżność?

10N. Znaleźć wszystkie wartości własne i odpowiadające im unormowane wektory własne macierzy z zadania 9N.

11N. Niech $\mathbf{S}$ oznacza macierz, której kolumnami są unormowane wektory własne macierzy z zadania 9N. Znaleźć wartości własne macierzy $\mathbf{S}$ i przedstawić je graficznie.

PFG