1. Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie macierzą symetryczną, dodatnio określoną i niech $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. *Metoda gradientów sprzężonych* zdefiniowana jest przez następującą iterację:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b},\, \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 \\
\textbf{while}\ \ \|\mathbf{r}_k\| > \varepsilon \\
\qquad \begin{array}{rcl}
\alpha_k &=& \dfrac{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T\mathbf{A}\mathbf{p}_k} \\
\mathbf{r}_{k+1} &=& \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k \\
\beta_k &=& \dfrac{\mathbf{r}_{k+1}^T\mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k} \\
\mathbf{p}_{k+1} &=& \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k \\
\mathbf{x}_{k+1} &=& \mathbf{x}_k - \alpha_k\mathbf{p}_k
\end{array} \\
\textbf{end}
\end{array}
\tag{1}
$$

Zakładamy, że $\mathbf{x}_1$ jest dowolne, $0 < \varepsilon \ll 1$. Udowodnić, że zachodzą następujące związki:

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_j = 0\,, \quad i > j\,, \tag{2a}$$

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{p}_j = 0\,, \quad i > j\,, \tag{2b}$$

$$\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j = 0\,, \quad i > j\,. \tag{2c}$$

Wskazówka: Dowód indukcyjny.

2. Gdzie w powyższym dowodzie wykorzystuje się założenie o dodatniej określoności macierzy $\mathbf{A}$?

3. Udowodnić, że w arytmetyce dokładnej wektor $\mathbf{x}_{N+1}$ wygenerowany zgodnie z (1) jest ścisłym rozwiązaniem równania

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{3}$$

Wskazówka: Znaleźć związek pomiędzy $\mathbf{r}_k$ a $\mathbf{x}_k$.

4N. Przyjmując oznaczenia jak w zadaniu 9N (nie 8N) z poprzedniego zestawu, rozwiązać równanie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$ dla $M = 30$ za pomocą

(a) metody gradientów sprzężonych,

(b) prewarunkowanej metody gradientów sprzężonych wykorzystującej *incomplete Cholesky factorization*.

Przedstawić graficznie jak zmienia się $\|\mathbf{r}_k\|$ w obu wypadkach. Dla ustalenia uwagi, przyjąć $\mathbf{x}_1 = 0$.

PFG