1. Przypuśćmy, że umiemy rozwiązać układ równań

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. Jak można użyć naszej wiedzy do rozwiązania równania macierzowego

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\,, \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{X}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $M \geqslant 1$. Jakiego algorytmu użyć?

2. Opierając się na wynikach poprzedniego zadania, opracować algorytm jawnego wyliczania odwrotności danej macierzy.

3N. Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{3}$$

za pomocą

(a) rozkładu $LU$,

(b) rozkładu Cholesky'ego,

(c) metody Jacobiego,

(d) metody Gaussa-Seidela.

Porównać numeryczny koszt tych metod.

4. Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ posiada rozkład względem wartości osobliwych (*SVD*) postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\,[\mathrm{diag}(w_i)]\,\mathbf{V}^T, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ są macierzami ortogonalnymi. Przypuśćmy, że $\forall\, i : w_i \neq 0$. Pokazać, że współczynnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$ wynosi

$$\kappa = \frac{\max\limits_i |w_i|}{\min\limits_i |w_i|}. \tag{5}$$

5. Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ posiada rozkład względem wartości osobliwych postaci (4). Niech $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ należy do zasięgu $\mathbf{A}$. Pokazać, że wektor

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\left[\mathrm{diag}\left(\widetilde{w}_i^{-1}\right)\right]\mathbf{U}^T\mathbf{b}, \tag{6}$$

gdzie

$$\widetilde{w}_i^{-1} = \begin{cases} w_i^{-1} & w_i \neq 0\,, \\ 0 & w_i = 0 \end{cases} \tag{7}$$

jest rozwiązaniem równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o najmniejszej możliwej normie.

6. Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $M \geqslant N$, posiada rozkład względem wartości osobliwych postaci (4), przy czym $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ jest macierzą kolumnowo ortogonalną. Pokazać, że wektor postaci (6), gdzie $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M}$, jest najlepszym, w sensie najmniejszych kwadratów, rozwiązaniem równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

7. Przypuśćmy, iż wykonano $N$ pomiarów pewnej wielkości $y$, odpowiadających $N$ różnym wartościom zmiennej niezależnej $x$ — dane są zatem ciągi $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $\{y_i\}_{i=1}^{N}$. Pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Do tych danych doświadczalnych chcemy dopasować metodą najmniejszych kwadratów zależność teoretyczną, daną w postaci wielomianu stopnia $p$:

$$y_{\mathrm{teor}} = \sum_{l=0}^{p} a_l x^l. \tag{8}$$

Pokazać jaki jest związek tego zagadnienia z problemem rozkładu względem wartości osobliwych.

8N. Dana jest macierz w postaci blokowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbb{I} & \\ \mathbb{I} & \mathbf{B} & \mathbb{I} \\ & \mathbb{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{9a}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & & & & \\ -1 & 6 & -1 & & & \\ & -1 & 6 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 6 & -1 \\ & & & & -1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M\times M}. \tag{9b}$$

$\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ jest macierzą jednostkową. Niezaznaczone elementy są zerami.

(a) Znaleźć rozkład Cholesky'ego macierzy $\mathbf{A}$ dla
   i. $M = 4$,
   ii. $M = 6$.

(b) Rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{e}$ jest wektorem złożonym z samych jedynek, za pomocą
   i. Znalezionych rozkładów Cholesky'ego,
   ii. Metody Jacobiego,
   iii. Metody Gaussa-Seidela

   dla takich samych $M$, jak poprzednio.

9N. Spróbować powtórzyć poprzednie zadanie zastąpiwszy w (9b) wszystkie "6" przez "4".

Uwaga: macierze w zadaniach numerycznych są rzadkie. ***Koniecznie*** trzeba użyć algorytmów wykorzystujących tę cechę — nie wolno niepotrzebnie mnożyć przez zera.

PFG