Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

10. Dwupunktowe problemy brzegowe

(BVP, Boundary Value Problems)

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

semestr letni 2007/08

Wprowadzenie

Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \,, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Rozwiązanie równania (1) zależy od n stałych wyznaczanych z warunków, jakie spełniać musi poszukiwana funkcja $\mathbf{y}$. Na Wykładzie 4 powiedzieliśmy, że *„jeśli wszystkie te warunki zadane są w jednym punkcie, równanie* (1) *wraz z warunkami narzuconymi na funkcję, nazywa się* problemem początkowym *czyli* problemem Cauchy'ego*”.*

A jeśli warunki **nie** są zadane w jednym punkcie?

Dwupunktowe problemy brzegowe

W praktyce dość często występują sytuacje, w których warunki zadane są w *dwu* punktach — na początku i na końcu przedziału, w którym poszukujemy rozwiązania. Oznaczmy ten przedział przez $[0, b]$. Warunki, które zadajemy, mają jedną z trzech postaci:

postać ogólna:
$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(b)) = 0\,, \tag{2a}$$

warunki liniowe:
$$\mathbf{B}_0\mathbf{y}(0) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{b}\,, \tag{2b}$$

rozsepa-rowane:
$$y_1(0) = \bar{y}_1, y_2(0) = \bar{y}_2, \dots, y_k(0) = \bar{y}_k, \tag{2c}$$
$$y_{k+1}(b) = \bar{y}_{k+1}, \dots, y_n(b) = \bar{y}_n\,, \quad 1 < k < n\,.$$

$\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_b$ są stałymi macierzami, $\mathbf{b}$ jest stałym wektorem. Warunek w postaci (2c) jest szczególną postacią (2b), który jest szczególną postacią (2a).

Równanie (1) wraz z jednym z warunków (2) nazywam *dwupunktowym problemem brzegowym* dla równania różniczkowego zwyczajnego.

Przykład 1:

Znaleźć $y(t)$ spełniające

$$\ddot{y} + y = 0\,, \tag{3}$$
$$y(0) = 0\,,\; y(b) = 1/2\,.$$
$$\left(\text{Rozwiązaniem jest } y(t) = \frac{\sin t}{2\sin b}\,.\right)$$

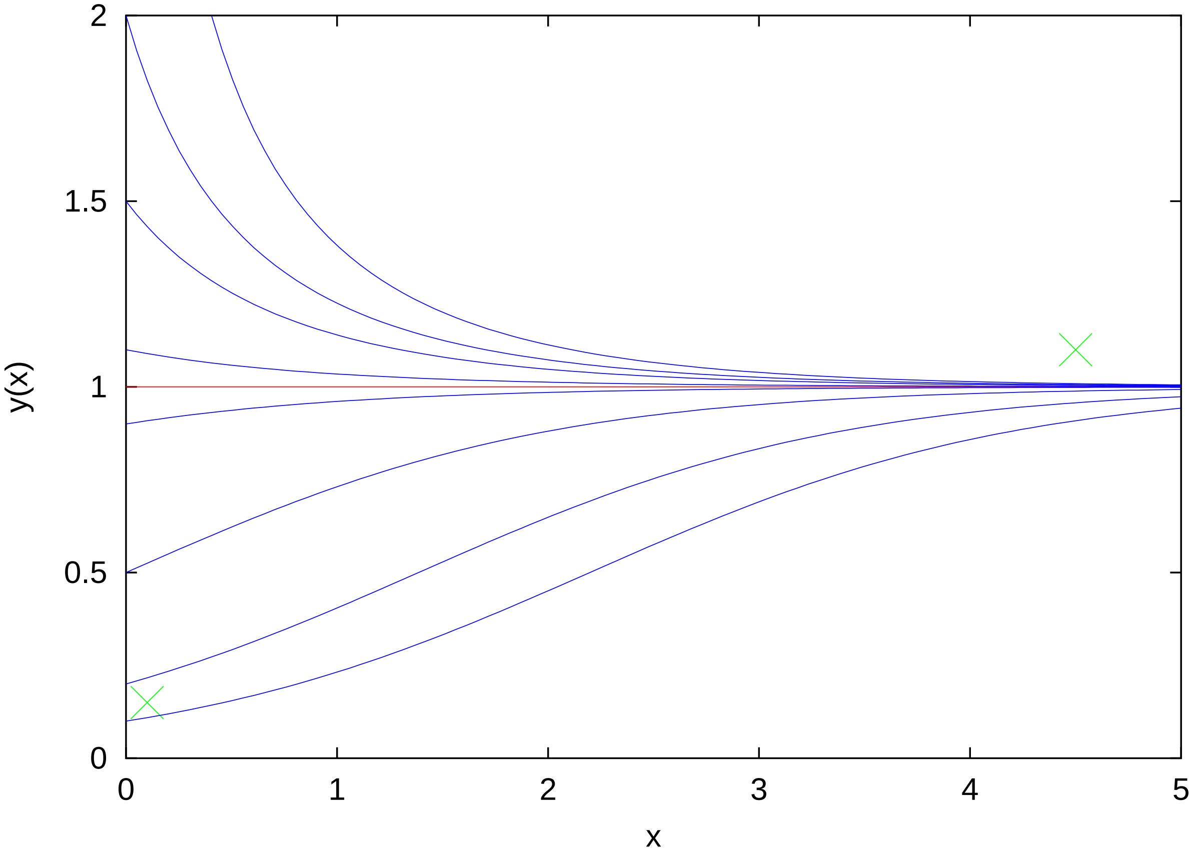
Przykład 2:

Równanie struny:

$$-(p(t)u')' + q(t)u = r(t)\,, \tag{4}$$
$$u(0) = 0\,,\; u'(b) = 0\,.$$

BVP może nie mieć rozwiązania

Przykład 3 — ODE z separatrysą:



BVP może mieć niejednoznaczne rozwiązanie

Przykład 4: Problem

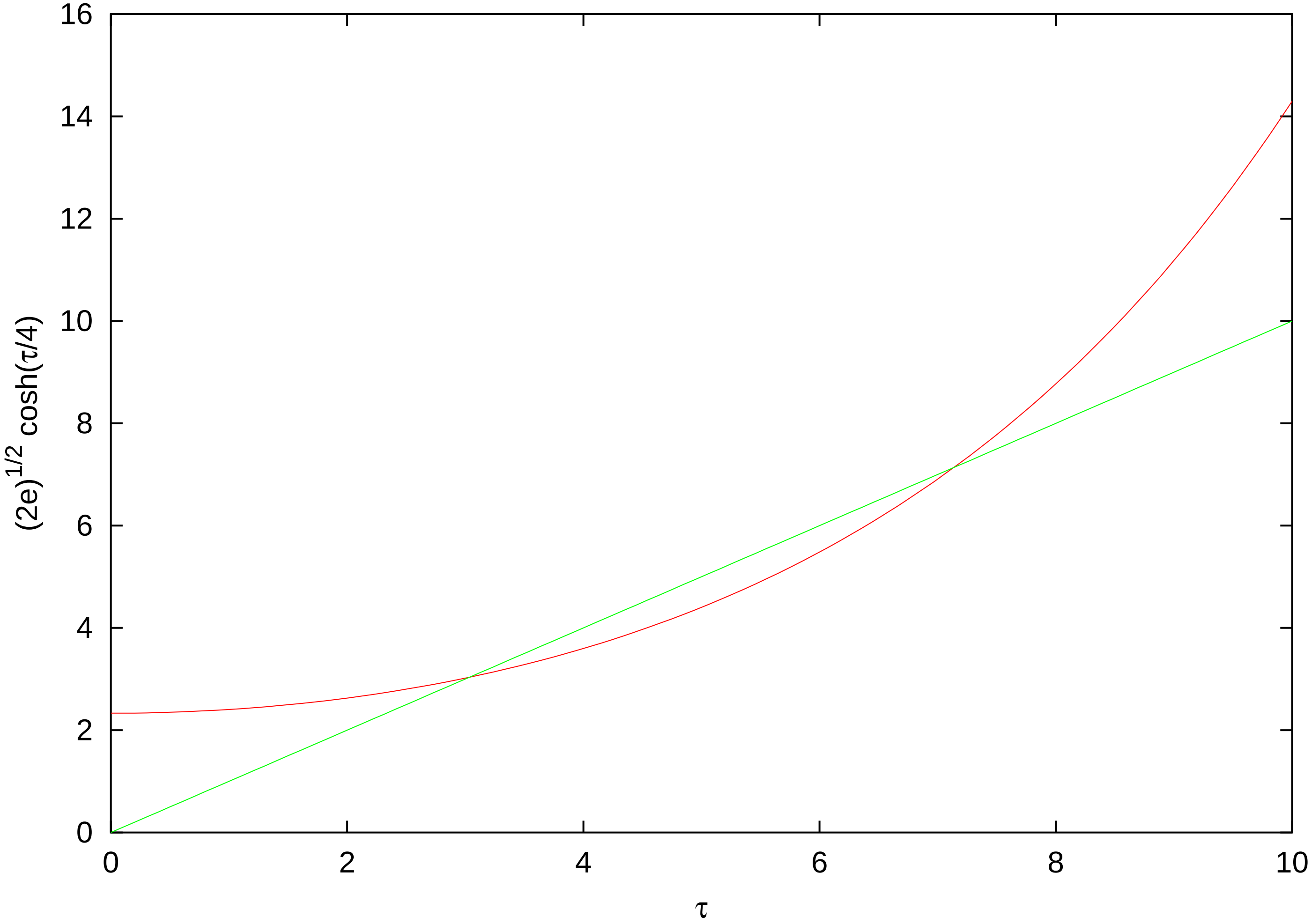
$$
\begin{aligned}
u'' + e^{u+1} &= 0\,, \\
u(0) = u(1) &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ma *dwa* rozwiązania dane przez

$$
u(t) = -2 \ln \left\{ \frac{\cosh\left[(t-1/2)\theta/2\right]}{\cosh(\theta/4)} \right\}\,,
\tag{6a}
$$

gdzie θ spełnia

$$
\theta = \sqrt{2e}\,\cosh(\theta/4)\,.
\tag{6b}
$$


16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
$(2e)^{1/2}\cosh(\tau/4)$
τ

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań BVP. . .

. . . w ogólności nie są znane. Znane jest tylko twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań *liniowego BVP z liniowymi warunkami brzegowymi*: Równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \tag{7}$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci (2b) ma rozwiązanie, które jest przy tym jednoznaczne, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}, \mathbf{q}$ są ciągłe oraz gdy macierz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b)\,, \tag{8a}$$

jest nieosobliwa, przy czym macierz $\mathbf{Y}(x)$ spełnia

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}\,, \tag{8b}$$

z warunkiem $\mathbf{Y}(0) = \mathbb{I}$.

Stabilność BVP

„Testowy” problem Cauchy’ego

$$\frac{dy_1}{dx} = -\lambda y_1\,,\ y_1(0) = 1\,, \tag{9}$$

jest stabilny gdy $\lambda > 0$. Dokonajmy w (9) zmiany zmiennych: $\tau = b - x$, $y_2(\tau) \equiv y_1(b-x)$. Wówczas $d/dx \to -d/d\tau$, $0 \to b$. Otrzymujemy

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \lambda y_2\,,\ y_2(b) = 1\,. \tag{10}$$

Równanie (10) jest *tożsamościowo równoważne* równaniu (9) i *także* jest stabilne dla $\lambda > 0$. Równanie (10) odpowiada propagacji wstecz w czasie. O ile (9) jest problemem początkowym, (10) jest „problemem końcowym”.

Jeśli zapisać (9), (10) łącznie, otrzymujemy następujący problem brzegowy o rozseparowanych warunkach:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$
$$y_1(0) = 1\,,\ y_2(b) = 1\,.$$

Z poprzedniej dyskusji widać, iż (11) jest, jako BVP, stabilny. Widzimy jednak, iż równanie różniczkowe w (11) *zawiera mody stabilne przy propagacji w przód oraz* inne *mody stabilne przy propagacji wstecz w czasie.*

Metoda strzelania — najprostszy przypadek

Rozważmy na początek równanie (1) z $n = 2$ oraz rozseparowanymi warunkami brzegowymi (2c):

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\,, && \text{(12a)}\\
y_1(0) &= y^{(1)}\,, && \text{(12b)}\\
y_2(b) &= y^{(b)}\,. && \text{(12c)}
\end{aligned}
$$

Równanie (12c) ma postać warunku końcowego. *Aby móc numerycznie rozwiązać problem* (12), *zamieniamy warunek końcowy na warunek początkowy*. Mamy zatem

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x,\mathbf{y})\,, &\quad (13a)\\
y_1(0) &= y^{(1)}\,, &\quad (13b)\\
y_2(0) &= c\,, &\quad (13c)
\end{aligned}
$$

gdzie c przyjmujemy na początku w sposób (prawie) dowolny. Teraz, przy ustalonym c, rozwiązujemy numerycznie problem Cauchy'ego (13). Rozwiązanie numeryczne daje nam $y_2(b) = \tilde{y}_2^{(b)}$. Oczywiście $\tilde{y}_2^{(b)}$ jest funkcją c, $\tilde{y}_2^{(b)} = \tilde{y}_2^{(b)}(c)$. Rozwiązanie numeryczne spełnia warunek początkowy (12b). Żądamy, aby także warunek końcowy (12c) był spełniony:

$$
\tilde{y}_2^{(b)}(c) = y_2^{(b)}\,. \tag{14}
$$

(14) jest *równaniem algebraicznym na warunek początkowy* c — metoda strzelania oznacza konieczność rozwiązania tego równania algebraicznego. Zauważmy, że każdorazowe obliczenie lewej strony równania (14), oznacza konieczność numerycznego rozwiązania problemu Cauchy'ego (13). Podkreślam, że równanie to trzeba *rozwiązać* za pomocą odpowiedniej metody numerycznej — dosłowne strzelanie, czyli dobieranie c na chybił-trafił, na ogół przynosi kiepskie rezultaty.

Gdyby trzeba było "uzupełniać" więcej warunków początkowych (dla $n > 2$), zamiast równania (14) otrzymujemy *układ* równań algebraicznych. Można go prosto rozwiązywać metodami nie wymagającymi obliczania pochodnej lewej strony, a zatem *nie* wielowymiarową metodą Newtona. Użycie metody Newtona może przyspieszyć zbieżność, wymaga to jednak dodatkowej analizy teoretycznej — patrz niżej.

Przykład

Rozważmy BVP

$$\frac{dy}{dx} = -y + xz\,, \tag{15a}$$

$$\frac{dz}{dx} = y - 3z\,, \tag{15b}$$

$$y(0) = 1\,, \tag{15c}$$

$$z(1) = 1\,. \tag{15d}$$

Metoda strzelania polega na zastąpieniu warunku (15d) przez warunek $z(0) = z_0$ i numerycznym rozwiązaniu powstałego problemu Cauchy'ego. Liczbę z_0 staram się dobrać tak, aby obliczona numerycznie wartość $z(1)$ spełniała (15d).

Wyniki metody strzelania dla problemu (15)

klasyczna czterokrokowa metoda Rungego-Kutty, $h = 1/512$