Zaawansowane metody numeryczne

Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

4. Równania różniczkowe zwyczajne — podstawy teoretyczne

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

semestr letni 2007/08

Wstęp

Najogólniejszą postacią równania różniczkowego zwyczajnego (ODE, *Ordinary Differential Equation*) rzędu n jest wyrażenie postaci

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0\,, \tag{1}$$

gdzie $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lub, niekiedy, $y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Jeśli pochodna F po ostatnim argumencie nie znika (przynajmniej lokalnie), (1) zapisujemy jako

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \widetilde{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right). \tag{2}$$

Trzeba jednak pamiętać, iż transformacja od (1) do (2) może wymagać dookreślenia (w tym sensie równanie (1) może nie być jednoznaczne).

Przykład: Równanie

$$(\dot{y})^2 + y^2 = 1 \tag{3a}$$

można zinterpretować na jeden z dwu sposobów:

$$\dot{y} = \sqrt{1-y^2}\,, \tag{3b}$$

$$\dot{y} = -\sqrt{1-y^2}\,. \tag{3c}$$

Notacja: $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} \equiv \frac{d^2y}{dt^2}$.

Układy równań pierwszego rzędu

Równanie w postaci (2) na ogół przedstawia się w postaci układu n równań pierwszego rzędu. Najprostsza — co nie oznacza, iż w każdym wypadku najlepsza — transformacja od równania rzędu n do układu n równań pierwszego rzędu ma postać:

$$\begin{gathered} y_1 \equiv y\,, \\ \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\; \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\; \dots\,,\; \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \equiv \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,, \\ \frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{dy_n}{dx} = \widetilde{F}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Dlatego od tej pory *będziemy się zajmować głównie układami równań rzędu pierwszego*. Układy te nie muszą mieć postaci sugerowanej przez transformację (4), ale widać, że takie zainteresowanie nie ogranicza ogólności rozważań.

Rozwiązania ogólne i szczególne

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n nazywam najbardziej ogólną postać funkcji $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, klasy co najmniej C^n, spełniającą równanie (2). Rozwiązanie to zależy od n parametrów.

Przykład: Rozwiązaniem ogólnym równania oscylatora harmonicznego

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \tag{5}$$

jest funkcja

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{6}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n jest pewien “przypadek szczególny” rozwiązania ogólnego — taki, w którym wartości wszystkich stałych dowolnych zostały ustalone, najczęściej poprzez podanie warunków, jakie ma spełniać rozwiązanie równania.

Przykład: Rozwiązaniem szczególnym równania oscylatora harmonicznego (5) może być funkcja

$$y(t) = \cos \omega t\,. \tag{7a}$$

Innym rozwiązaniem szczególnym tego równania może być funkcja

$$y(t) = -\frac{3}{4} \sin\left(\omega t + \frac{9\pi}{17}\right). \tag{7b}$$

Obserwacja: Rozwiązaniem szczególnym układu n równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego jest krzywa $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Numerycznie można poszukiwać tylko *szczególnych* (nie ogólnych) rozwiązań równań różniczkowych. Rozwiązanie równania rzędu n lub też, co równoważne, układu n równań rzędu pierwszego, zależy od n stałych wyznaczanych z warunków, jakie spełniać ma poszukiwana funkcja. Jeśli wszystkie te warunki zadane są w jednym punkcie, czyli dla jednej wartości zmiennej niezależnej, mówimy, iż dany jest problem początkowy, zwany inaczej problemem Cauchy'ego.

Problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (czasami zamiast $\mathbb{R}$ bierze się $\mathbb{C}$).

Twierdzenie Peana

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja* f *jest ciągła w pasie* $x_0 \leqslant x \leqslant X$, *to problem Cauchy'ego* (8) *ma rozwiązanie w tym pasie.*

Tradycyjnie, acz niezgodnie z zasadami polszczyzny, twierdzenie to zwane jest "twierdzeniem Peano".

Uwaga: Twierdzenie Peana nie gwarantuje *jednoznaczności* rozwiązań. Przykład: Problem Cauchy'ego

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y} & = & 2\sqrt{|y|} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

ma co najmniej dwa różne rozwiązania:

$$y_1(t) \;=\; 0\,, \tag{10a}$$

oraz

$$y_2(t) \;=\; \begin{cases} -t^2 & t \leqslant 0\,, \\ t^2 & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{10b}$$

(zauważmy, że $dy_2/dt = 2|t|$).

Twierdzenie Picarda

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja* $\mathbf{f}$ *jest ciągła w pasie* $x_0 \leqslant x \leqslant X$ *oraz spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną:*

$$\exists L > 0 \; \forall x : x_0 \leqslant x \leqslant X, \; \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 : ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)|| \leqslant L||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$$

to problem Cauchy'ego (8) *ma w tym pasie rozwiązanie i jest ono jednoznaczne.*

Metody numeryczne w zasadzie ograniczają się do przypadków spełniających założenia twierdzenia Picarda.

Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych

Twierdzenie 3. *Niech funkcja* $\mathbf{f}$ *będzie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Wówczas istnieje takie otoczenie* $U \subset \mathbb{R}$ *punktu* x_0 *i takie otoczenie* $S \subset \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{y}_0 \in S$*, w którym problem Cauchy'ego* $d\mathbf{y}/dx = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$*,* $\mathbf{y}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{y}}$ *ma rozwiązanie dla wszystkich* $\tilde{x} \in U$*,* $\tilde{\mathbf{y}} \in S$*. Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego* $(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}})$ *w sposób ciągły.*

Garść informacji teoretycznych, które powinniście państwo znać, ale nie znacie

1. Równania o zmiennych rozdzielonych ($y \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$): Równania postaci

$$\frac{dy}{dt} = u(t)v(y) \tag{11}$$

zawsze można rozwiązać przez kwadratury:

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(t)\, dt\,, \tag{12}$$

chociaż po wykonaniu całek znalezienie *jawnej* postaci zależności $y(t)$ może być niewykonalne. Stała całkowania odpowiada stałej występującej w rozwiązaniu ogólnym.

2. Całkowanie ODE przez podstawienie

Niekiedy ODE ze skomplikowaną prawą stroną $\dot{y} = f(t, y)$ można sprowadzić do prostszego równania, podstawiając $y = g(t, z)$. Zgadnąć dobre podstawienie nie jest łatwo!

Przykład:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + 2\left(\frac{y}{t}\right)^2 . \tag{13}$$

Podstawiam $y = zt$, zatem $dy/dt = t\,dz/dt + z$, a zatem powyższe równanie przechodzi w

$$t\frac{dz}{dt} = 2z^2 . \tag{14}$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Ostatecznie

$$y = \frac{t}{C - 2\ln t} . \tag{15}$$

3. Najczęściej rozwiązywany problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = \lambda y \\ y(0) & = y_0 \end{cases} \tag{16}$$

Rozwiązaniem jest $y = y_0 \exp(\lambda t)$.

4. Układ równań liniowych, pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach

Niech $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Rozważam równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{17}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{y}_0\,, \tag{18}$$

gdzie $\mathbf{y}_0$ jest stałym wektorem (warunki początkowe).

5. Niejednorodny układ równań liniowych, pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach

Niech $\mathbf{y}, \mathbf{g}(t) \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Rozważam równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{19}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^t \exp\Big(\mathbf{A}(t-t')\Big)\, \mathbf{g}(t')\, dt' \,, \tag{20}$$

gdzie $\mathbf{y}_0$ jest stałym wektorem (warunki początkowe).

6. Funkcja wykładnicza macierzy

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ będzie stałą, diagonalizowalną macierzą:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\,. \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{A}t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\right)^n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\,\cdots\,\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}}_{n\ \text{razy}} \\
&= \mathbf{X}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\text{diag}\{\lambda_i^n\}\right)\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\,\text{diag}\left\{e^{\lambda_i t}\right\}\mathbf{X}
\end{aligned} \tag{22}$$

7. Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

Jest to równanie postaci

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t) \tag{23}$$

Twierdzenie 4. *Rozwiązanie ogólne równania* (23) *jest równe sumie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.*

Należy więc zacząć od analizy równania jednorodnego ($f(t) \equiv 0$).

Zgodnie z tym, co powiedziano uprzednio, równanie (23) można zapisać w postaci układu równań pierwszego rzędu, przyjmując $y_1 = d^{n-1}y/dt^{n-1}$, $y_2 = d^{n-2}y/dt^{n-2}$, $\ldots$, $y_{n-1} = dy/dt$, $y_n = y$. Otrzymujemy wówczas

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} \tag{24}$$

Jest tu układ rownań postaci (17). Trzeba zatem znaleźć wartości własne macierzy występującej w równaniu (24).

Wyznacznik charakterystyczny ma postać

$$W_n = \det \begin{bmatrix} -a_1-\lambda & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \tag{25}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem ostatniej kolumny

$$\begin{aligned} W_n = -\lambda W_{n-1} - a_n(-1)^{n+1} &= \lambda^2 W_{n-2} + (-1)^n(a_{n-1}\lambda + a_n) \\ &= -\lambda^3 W_{n-3} + (-1)^n(a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_n) = \dots \\ &= (-1)^{n-2}\lambda^{n-2}W_2 + (-1)^n(a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) \\ &= (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Widzimy zatem, że jeżeli równanie charakterystyczne

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{27}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych, rozwiązanie *ogólne* równania jednorodnego (23) ma postać

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t} \tag{28}$$

Jeżeli natomiast ktoryś pierwiastek, powiedzmy λ_l, jest k-krotny, w rozwiązaniu (28) w odpowiednim miejscu bierzemy

$$\cdots + A_l e^{\lambda_l t} + A_{l+1} t e^{\lambda_l t} + \cdots + A_{l+k} t^{k-1} e^{\lambda_l t} \ldots \tag{29}$$

Jeżeli równanie (23) ma współczynniki rzeczywiste, stałe A_k *zawsze*, niezależnie od warunków początkowych, można dobrać tak, żeby rozwiązanie także było rzeczywiste.

8. Uzmiennianie stałej

Rozważmy teraz równanie (23) liniowe, o stałych współczynnikach, niejednorodne ($f(t) \not\equiv 0$). Niech równanie jednorodne ma rozwiązanie (28). Bierzemy teraz *dowolny z członów* $A_s \exp(\lambda_s t)$ i przyjmujemy $A_s \to B(t)$:

$$y(t) = B(t)e^{\lambda_s t}\,. \tag{30a}$$

Wówczas

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_s B e^{\lambda_s t} + \dot{B}\, e^{\lambda_s t}\,, \tag{30b}$$

co podstawiamy do równania (23). Pierwszy z członów kasuje się i ostatecznie dostajemy

$$\dot{B} = f(t)e^{-\lambda_s t}\,. \tag{30c}$$

Nie ma ogólnych metod rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych.

☹

9. Punkty stacjonarne i stabilność

Rozważmy autonomiczne równanie różniczkowe

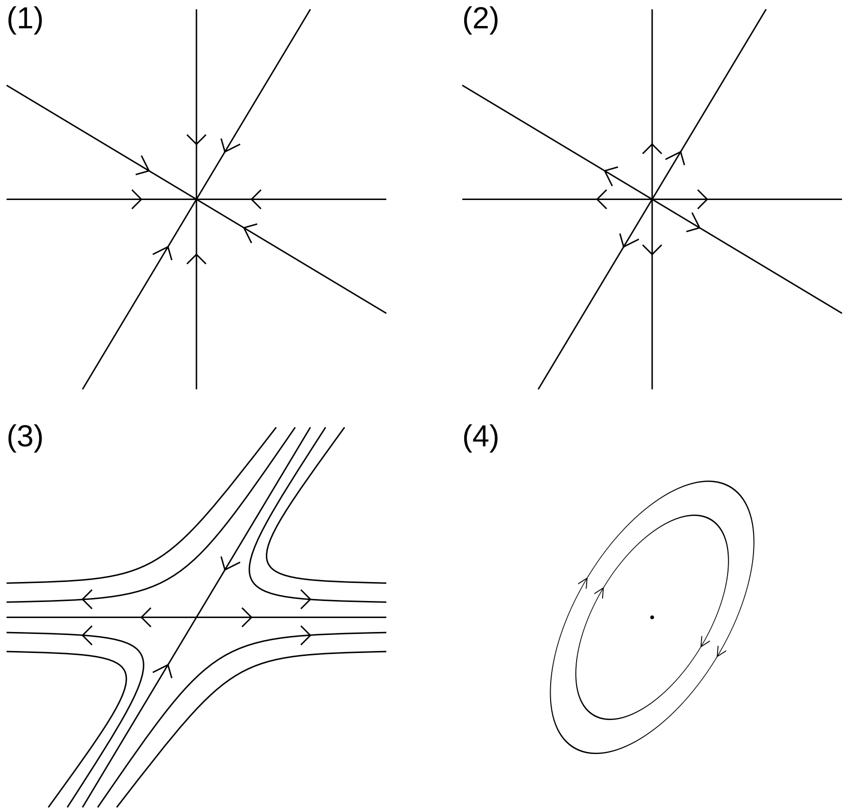
$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})\,. \tag{31}$$

Punktem stacjonarnym równania (31) nazywam takie $\mathbf{y}^\star$, że $\mathbf{f}(\mathbf{y}^\star) = 0$. Punkt stacjonarny jest rozwiązaniem równania (31). Czy jest to rozwiązanie stabilne? Przyjmijmy $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^\star + \varepsilon(t)$, $\|\varepsilon\| \ll 1$. Wówczas z równania (31) otrzymujemy

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{J}\varepsilon\,, \tag{32}$$

gdzie $\mathbf{J} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^\star}$. Rozwiązanie $\mathbf{y} = \mathbf{y}^\star$ jest stabilne, jeśli wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ mają mniejsze od zera części rzeczywiste.

Klasyfikacja punktów stacjonarnych w $\mathbb{R}^2$



(1) Re $\lambda_1 < 0$, Re $\lambda_2 < 0$ (ognisko przyciągające)

(2) Re $\lambda_1 > 0$, Re $\lambda_2 > 0$ (ognisko odpychające)

(3) Re $\lambda_1 > 0$, Re $\lambda_2 < 0$ (siodło)

(4) Re $\lambda_1 =$ Re $\lambda_2 = 0$

gdzie $\lambda_{1,2}$ oznaczają wartości własne jakobianu $\mathbf{J}|_{\mathbf{y}^\star}$.