

Zaawansowane metody numeryczne
Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

5. Terminologia.

Metody Eulera, metody punktu środkowego i metody
trapezowe

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

semestr letni 2006/07

Problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

to przepis na to jak uzyskać rozwiązanie po infimezymalnie małym kroku czasowym.

Metody numeryczne



zamiana problemu ciągłego na dyskretny

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h, \dots$$
$$y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_n = y(x_n), \dots$$

h — krok czasowy (niekiedy może się zmieniać, ale o tym później)

Metoda jawna (*explicit*) s -krokowa, rzędu p :

$$y_{n+1} = \mathcal{F}(h; x_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s+1}) + O(h^{p+1}) \quad (2)$$

Przepis konstrukcyjny pozwalający wyliczyć wartość poszukiwanej funkcji w kolejnym punkcie korzystając z s punktów, w których wartość ta jest znana. Różnica pomiędzy dokładnym a przybliżonym rozwiązaniem jest (w jednym kroku) rzędu h^{p+1} .

Metoda niejawna (*implicit*) s –krokowa, rzędu p :

$$y_{n+1} = \mathcal{G}(h; x_n, y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s+1}) + O(h^{p+1}) \quad (3)$$

Równanie algebraiczne (na ogół nieliniowe, wielowymiarowe), jakie musi spełniać poszukiwana funkcja w kolejnym punkcie. Równanie to trzeba numerycznie rozwiązać w każdym kroku całkowania równania różniczkowego. W równaniu uwzględniane są informacje z s punktów, w których poszukiwana funkcja jest już znana. Różnica pomiędzy dokładnym a przybliżonym rozwiązaniem jest (w jednym kroku) rzędu h^{p+1} .

Zgodność

Od każdej metody numerycznego całkowania równań różniczkowych wymaga się, aby była *zgodna* z wyjściowym równaniem, to jest aby odtwarzała je w granicy nieskończenie małych kroków.

Przykład: Dla metody jawnej (2) rozpatrzmy wyrażenie

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{\mathcal{F}(h; x_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s+1}) - y_n}{h}. \quad (4)$$

Lewa strona (4) nie zależy od wyboru metody i jest równa $(y_{n+1} - y_n)/h = (y(x_n+h) - y(x_n))/h$, a zatem jej granica przy $h \rightarrow 0^+$ wynosi $dy/dx|_{x=x_n} = f(x_n, y_n)$.

Cała informacja o metodzie zawarta jest w prawej stronie (4), a zatem warunkiem zgodności metody (2) jest

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{F}(h; x_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s+1}) - y_n}{h} = f(x_n, y_n). \quad (5)$$

Dla metod niejawnych zapisanych formalnie w postaci (3) nie można podać kryterium zgodności w postaci zwartej (można to zawsze zrobić dla konkretnej metody niejawnej), tym niemniej wymaga się, aby **wszystkie**, a więc także niejawne, metody były zgodne.

Stabilność

Podczas numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych popełnia się dwa rodzaje nieuniknionych błędów numerycznych:

- błąd metody, wynikający z zastąpienia ścisłego problemu ciągłego problemem dyskretnym oraz
- błąd zaokrąglenia, wynikający z faktu, iż obliczenia prowadzone są ze skończoną dokładnością.

Dlatego też warunek początkowy w problemie Cauchy'ego ulega w każdym kroku „rozmyciu”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_1) = y_1 + \varepsilon_1 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_2) = y_2 + \varepsilon_2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Gdyby ten „błąd rozmycia” mógł propagować się z kroku na krok, rozwiązanie numeryczne szybko mogłoby przestać mieć cokolwiek wspólnego z rozwiązaniem wyjściowego problemu Cauchy'ego: **aby metoda była stabilna, błędy popełniane w kolejnych krokach nie mogą narastać z kroku na krok.**

Zakładamy, że błędy są niewielkie, $\|\epsilon_n\| \ll 1$, możemy się więc ograniczyć do przybliżenia liniowego. W tym przybliżeniu

$$\epsilon_{n+1} = G\epsilon_n. \quad (7)$$

Błędy nie będą narastać z kroku na krok, jeśli **wszystkie** wartości własne macierzy G będą spełniać $|\gamma| < 1$. Macierz G nazywamy *macierzą wzmocnienia*.

Przykład: Dla jednokrokowej metody jawnej

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = \mathcal{F}(h; x_n, y_n + \varepsilon_n) \simeq \mathcal{F}(h; x_n, y_n) + \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_n} \varepsilon_n. \quad (8)$$

W powyższym wyrażeniu $\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{y}$ oznacza różniczkowanie wszystkich składowych \mathcal{F} po wszystkich składowych \mathbf{y} , czyli obliczanie jacobianu: Dla jednokrokowej metody jawnej

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}}(h; x_n, \mathbf{y}_n). \quad (9)$$

Jeżeli jakaś metoda w ogóle może być stabilna dla danego równania, wymóg stabilności oznacza na ogół wzięcie odpowiednio małego kroku h . Zgodnie z wyrażeniem (9), krok czasowy, który w pewnym punkcie zapewnia stabilność, może go nie zapewniać w innym.

Jawna metoda Eulera

Problem Cauchy'ego (1) to przepis na to jak uzyskać rozwiązanie po infinitezy- malnie małym kroku czasowym. Spróbujmy zastosować ten przepis dla kroków małych, ale o skończonej długości. W tym celu dokonajmy rozwinięcia Taylora:

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h) \simeq y(x_n) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_n, y=y_n} h + O(h^2), \quad (10)$$

a zatem

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + O(h^2). \quad (11)$$

Metoda ta, zwana *jawną metodą Eulera*, jest najpopularniejszą (i jedną z najgor- szych) metodą używanych do numerycznego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych.

Uwaga na błąd zaokrąglenia!

Zauważmy, iż po prawej stronie (11) mamy sumę dwóch wyrazów: Jednego “dużego”, rzędu $O(1)$, i drugiego “małego”, rzędu $O(h)$. Może to doprowadzić to utraty dokładności, zwłaszcza jeśli $0 < h \ll 1$. Problem jest tym większy, że ostateczne rozwiązanie uzyskujemy po *wielu* krokach Eulera. Można temu przynajmniej częściowo zaradzić odpowiednio adaptując *algorytm sumacyjny Kahana*: Niech $z_0 = 0$. W każdym kroku obliczamy

$$\delta = h f(x_n, y_n) + z_n, \quad (12a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \delta, \quad (12b)$$

$$z_{n+1} = \delta - (y_{n+1} - y_n) \quad (12c)$$

Nawiasy w ostatnim z wyrażeń (12) *nie są redundantne*. W arytmetyce dokładnej (bez błędów zaokrąglenia) $z_n \equiv 0$ i metoda (12) sprowadza się do metody (11).

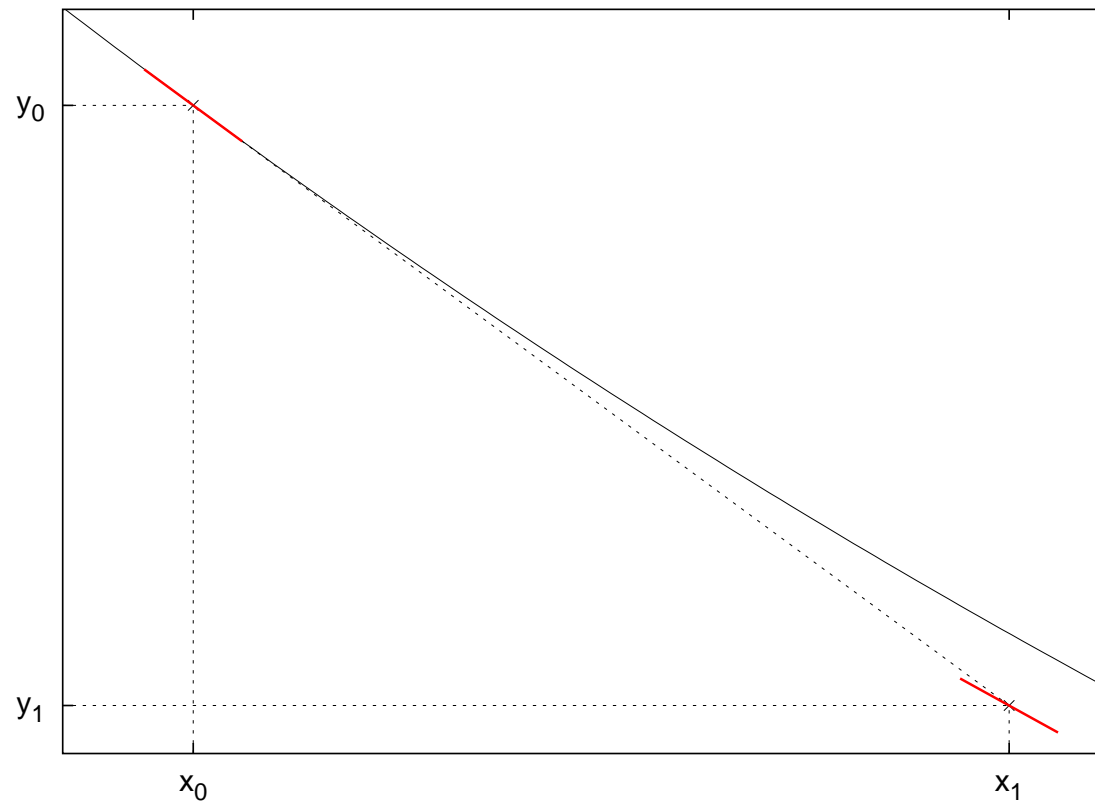
Chociaż nie będziemy tego pisać jawnie, trick zastosowany w (12) należy stosować we *wszystkich* metodach omawianych w trakcie tych wykładów.

Inne wyprowadzenie metody Eulera:

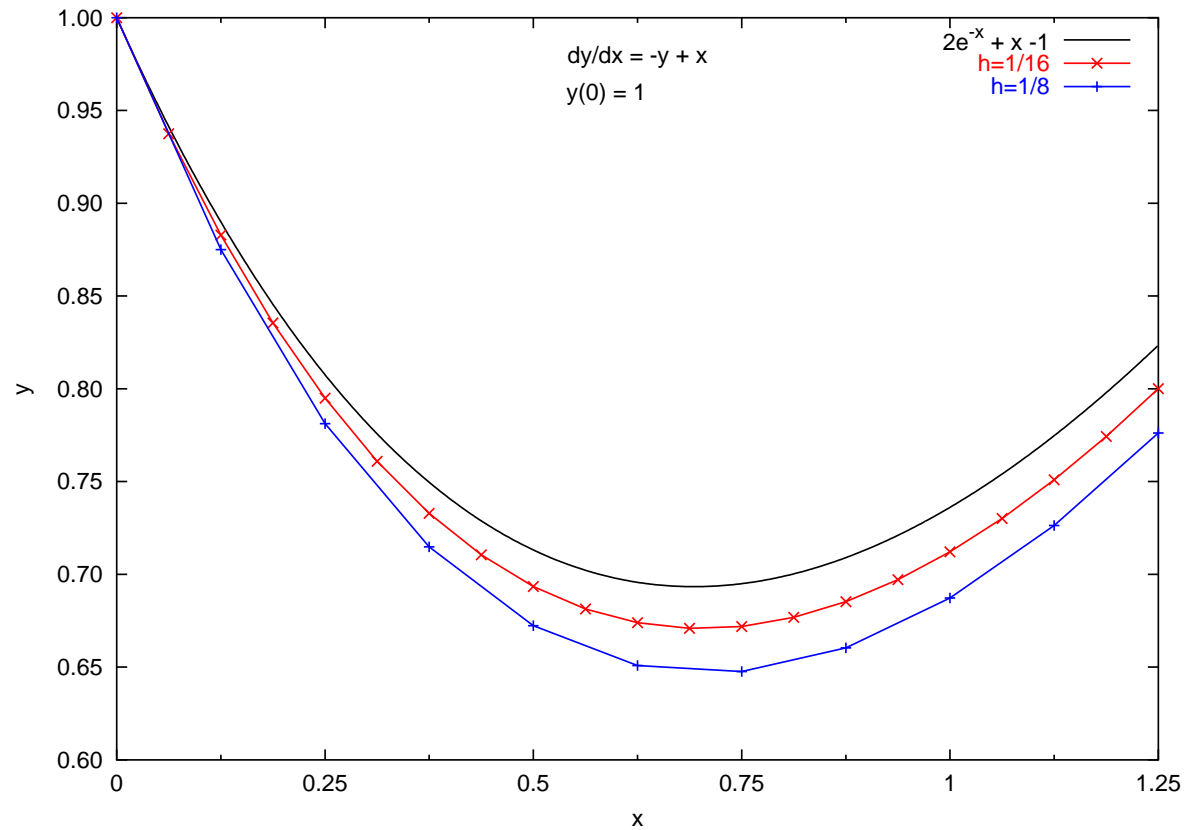
(pozornie inne)

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{dy}{dx} dx = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) dx \\ &\simeq y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} (\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + O(h)) dx = y_n + h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + O(h^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Interpretacja geometryczna jawnej metody Eulera (przypadek jednowymiarowy)



Przykład zastosowania jawnej metody Eulera



Stabilność jawnej metody Eulera

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n + h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ &\simeq \mathbf{y}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n + h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + h \mathbf{J}(x_n, \mathbf{y}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned} \quad (14)$$

a zatem macierz wzmocnienia ma postać

$$\mathbf{G} = \mathbb{I} + h \mathbf{J}(x_n, \mathbf{y}_n), \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{J}(x_n, \mathbf{y}_n) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y} |_{x=x_n, \mathbf{y}=\mathbf{y}_n}$ jest jacobianem prawej strony równania po drugiej zmiennej. \mathbb{I} jest macierzą jednostkową.

Obserwacja:

Dla równania liniowego

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}y, \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, macierzą wzmocnienia w jawnej metodzie Eulera jest

$$\mathbf{G} = \mathbb{I} + h\mathbf{A}. \quad (17)$$

Macierz \mathbf{A} może, w ogólności, zależeć od zmiennej niezależnej, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x)$.

Niejawna metoda Eulera

Przy wyprowadzaniu jawnej metody Eulera rozwijaliśmy poszukiwaną funkcję w szereg Taylora wokół lewego krańca przedziału. Nic jednak nie szkodzi dokonać rozwinięcia wokół prawego krańca:

$$y_n = y(x_n) = y(x_{n+1} - h) \simeq y(x_{n+1}) - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{n+1}, y=y_{n+1}} h + O(h^2), \quad (18)$$

a zatem

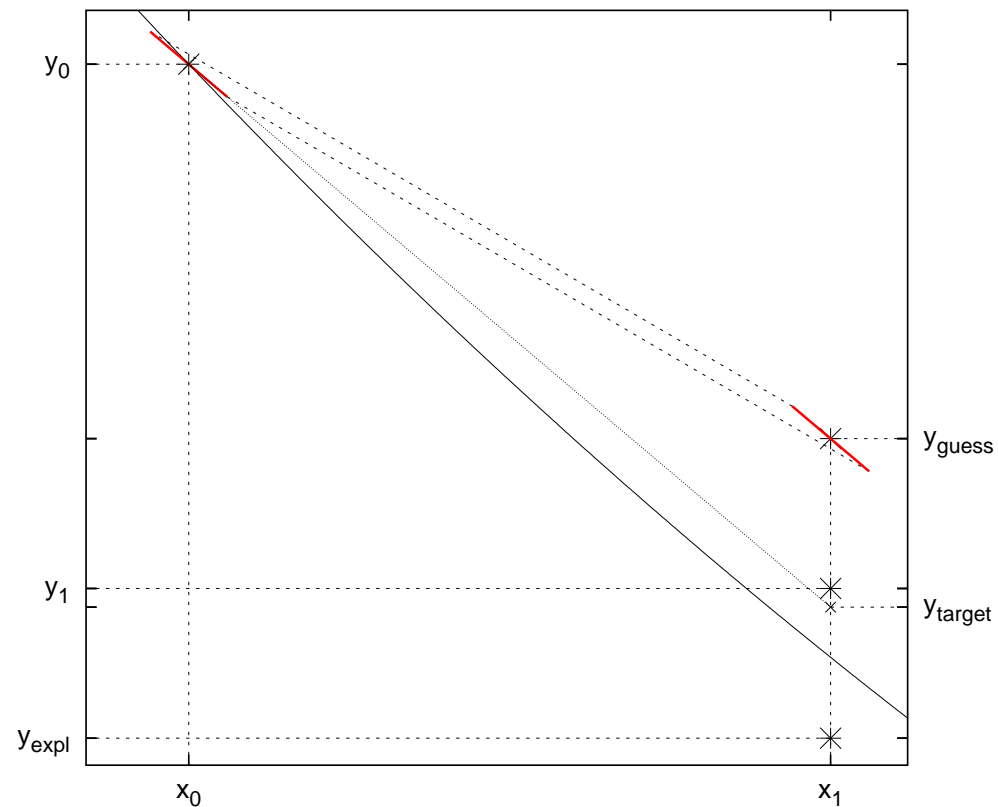
$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) + O(h^2). \quad (19)$$

W wyrażeniu (19) nieznaną wielkość y_{n+1} występuje po obu stronach — jest to zatem *równanie algebraiczne*, jakie spełniać ma numeryczna wartość poszukiwanego rozwiązania.

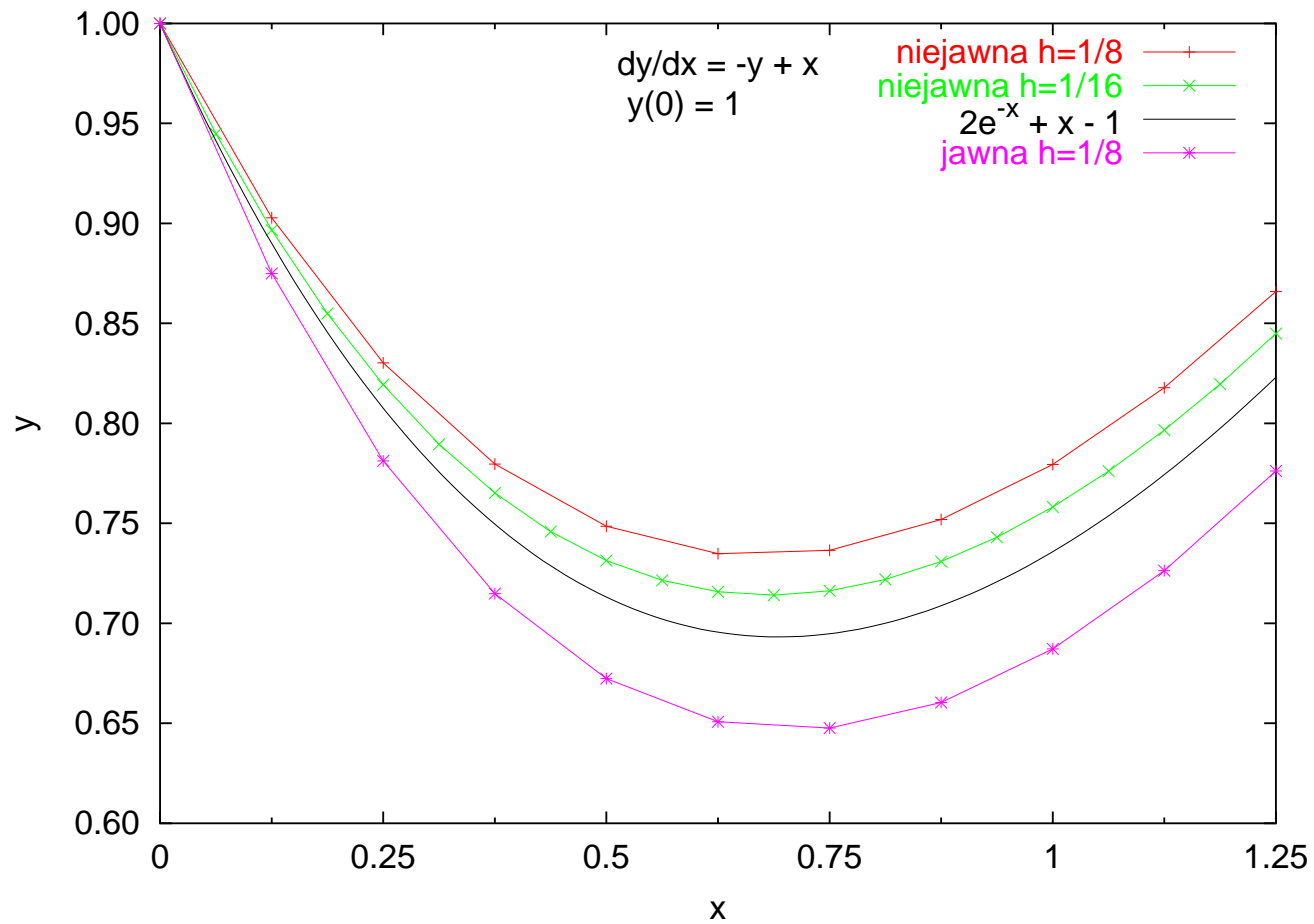
Zauważmy, że obie metody Eulera, jawna i niejawna, są tego samego rzędu. Istotnie,

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) + O(h^2) \\
 &= y_n + h f(x_n + h, y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})) + O(h^2) \\
 &\simeq y_n + h \left(f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\dots} h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\dots} h f(\dots) + O(h^2) \right) + O(h^2) \\
 &= y_n + h f(x_n, y_n) + O(h^2). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna niejawniej metody Eulera (przypadek jednowymiarowy)



Przykład zastosowania niejawnej metody Eulera



Stabilność niejawnej metody Eulera

Dla metody niejawnej (19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} &= y_n + \varepsilon_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) \\ &\simeq y_n + \varepsilon_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) + h \mathbf{J}(x_{n+1}, y_{n+1}) \varepsilon_{n+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

a zatem

$$\mathbf{G} = \left(\mathbb{I} - h \mathbf{J}(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)^{-1}. \quad (22)$$

\mathbf{J} , jak poprzednio, jest jacobianem f po drugiej zmiennej, ale obliczanym w innym punkcie. Obserwacja: Dla równania liniowego (16) macierz wzmocnienia ma postać

$$\mathbf{G} = (\mathbb{I} - h\mathbf{A})^{-1}. \quad (23)$$

Przykład:

Rozpatrzmy następujący problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1004 & 2004 \\ -1005 & -2005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \\ u(0) = 1, \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Analityczne rozwiązanie tego problemu ma postać

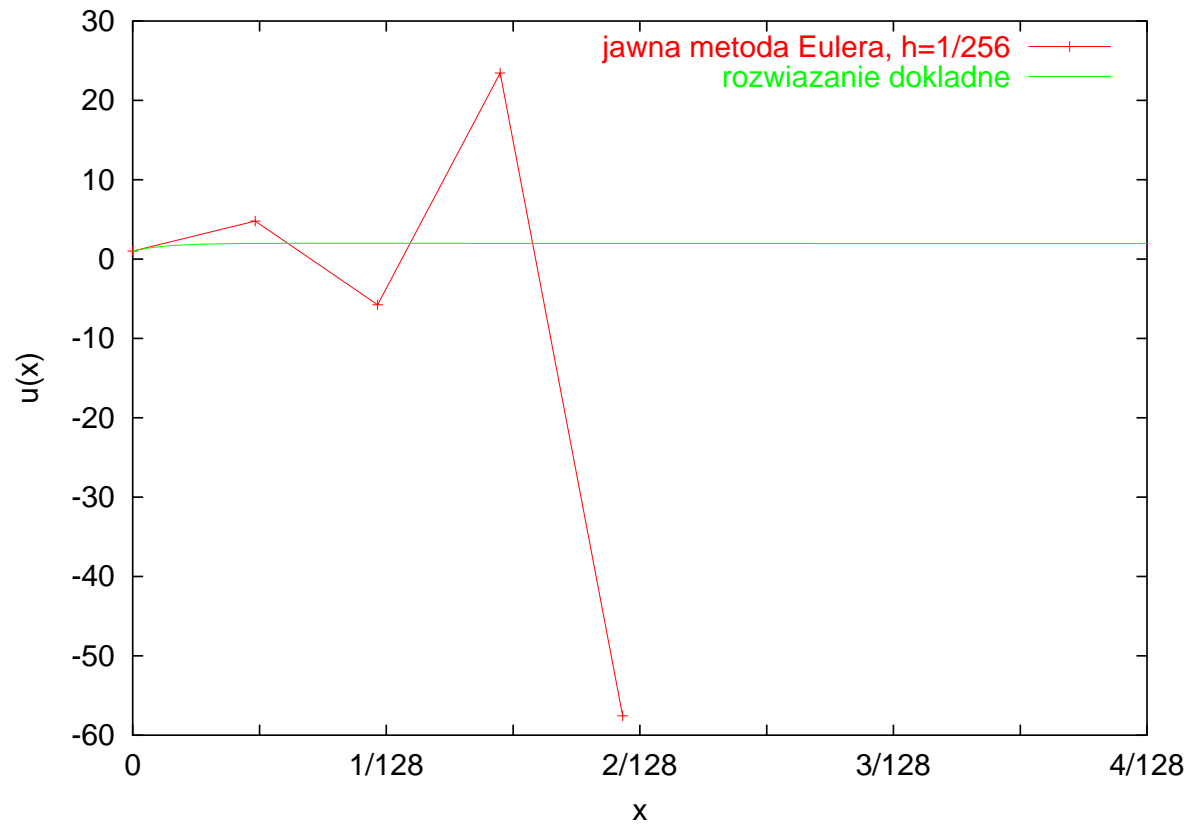
$$u(x) = \frac{668}{333}e^{-x} - \frac{335}{333}e^{-1000x}, \quad (25a)$$

$$v(x) = -\frac{335}{333}e^{-x} + \frac{335}{333}e^{-1000x}. \quad (25b)$$

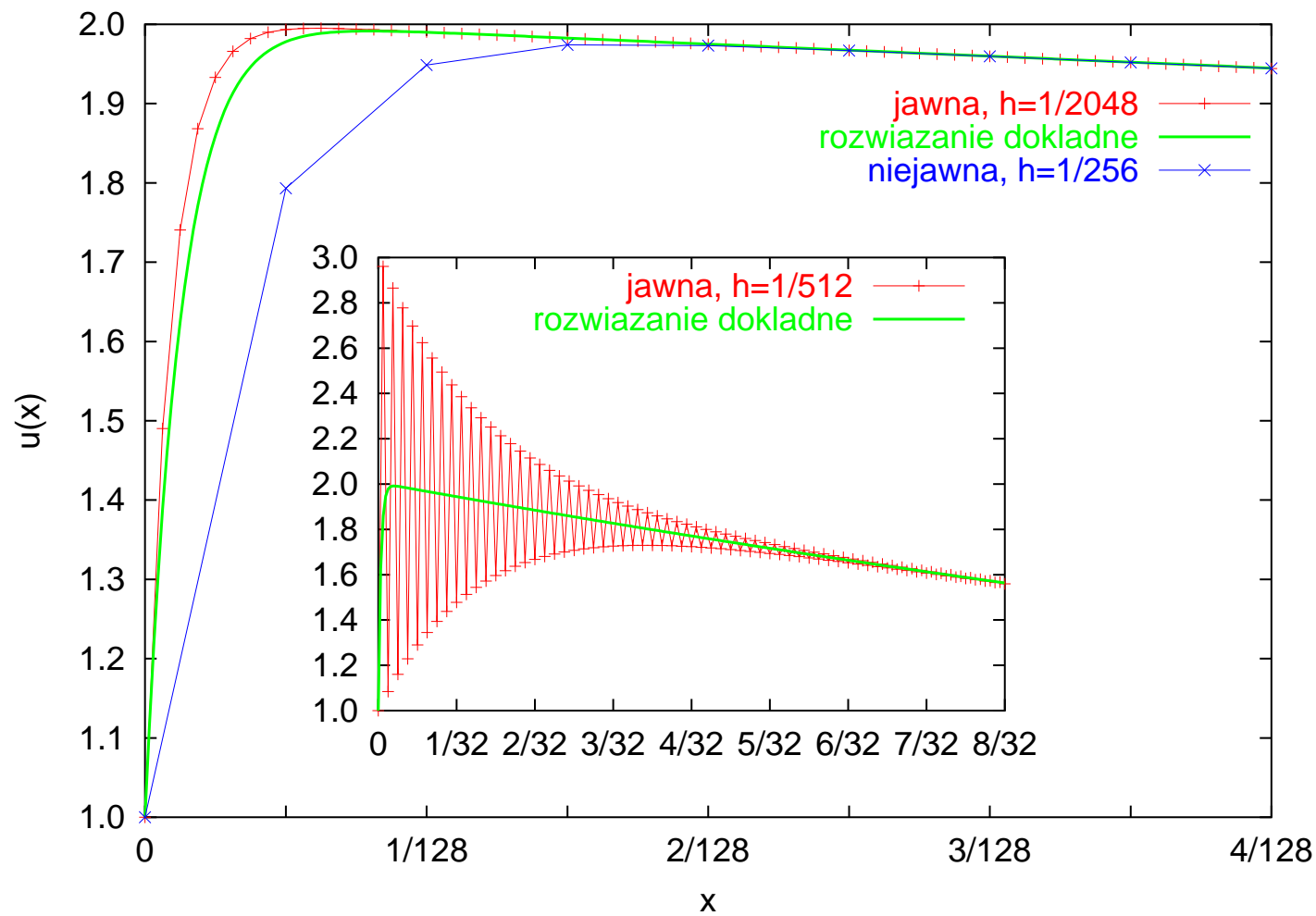
Rozwiązanie (25) ma dwie charakterystyczne skale czasowe: $T_1 = 1$ i $T_2 = 1/1000 \ll T_1$. Ta druga skala czasowa nie gra, poza początkowym okresem, żadnej istotnej roli w rozwiązaniu. Spróbujmy rozwiązać problem (24) przy pomocy jawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/256$. Wyniki przedstawia tabela

x	$u(x)$ jawna met. Eulera, $h = \frac{1}{256}$
0	1.00000000
1/128	4.78867912
2/128	-5.74808168
3/128	23.44808960
4/128	-57.55829240
5/128	167.09159900
6/128	-456.02206400
7/128	1272.20862000
8/128	-3521.21387000

oraz wykres...



Skąd bierze się taki wynik? Zauważmy, że $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \frac{334\,332}{333} = 1004$, a zatem dla małych wartości argumentu szukana funkcja narasta bardzo szybko, jednak, jak się okazuje, wybrany krok czasowy jest większy niż charakterystyczna skala tego narastania — przybliżenie numeryczne „przestrzeliwuje”, w następnym kroku stara się ten błąd „skompensować” i w rezultacie rozwiązanie rozbiega się oscylacyjnie. Rozwiązanie jawną metodą Eulera z krokiem dwa razy mniejszym, $h = 1/512$, także wykazuje silne oscylacje dla małych wartości argumentu, ale oscylacje te są tłumione. Jednocześnie jawna metoda Eulera z krokiem $h = 1/2048$ oraz niejawną metodą Eulera z krokiem $h = 1/256$ nie oscylują i mimo początkowych odchyłeń od rozwiązania dokładnego, zbiegają się do niego bardzo szybko.



Zjawiska te można wyjaśnić w oparciu o teorię stabilności. Wartości własne macierzy z problemu (24) wynoszą $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$. Wobec tego wartości własne macierzy wzmocnienia (17) wynoszą $\gamma_1 = 1 - h$, $\gamma_2 = 1 - 1000h$.

Z warunku $|\gamma_{1,2}| < 1$ wynika, iż dla zapewnienia stabilności rozwiązania problemu (24) w **jawnej** metodzie Eulera musi zachodzić $0 < h < \frac{1}{500}$. Układ typu (24), w którym występuje kilka wyraźnie różnych skal czasowych i jawna metoda numeryczna w celu zapewnienia stabilności musi się dostosować do najszybszej z nich, mimo iż jest ona *praktycznie* nieobecna w rozwiązaniu, nazywa się **problemem sztywnym**.

Wartości własne macierzy wzmocnienia (23) w metodzie **niejawnej** wynoszą $\gamma_1 = (1 + h)^{-1}$, $\gamma_2 = (1 + 1000h)^{-1}$, a zatem $\forall h > 0$ metoda jest stabilna. Metody takie nazywamy **A-stabilnymi**.

Problem: Zmiana pochodnej na przestrzeni kroku całkowania

Wróćmy do wyjściowego problemu Cauchyego (1). Metody Eulera, jawna i niejawna, ignorują fakt, iż prawa strona (pochodna poszukiwanej funkcji) zmienia się w trakcie wykonywania kroku całkowania. Spodziewamy się, że pewna „średnia” pochodna będzie lepiej opisywać zmiany funkcji na całym przedziale o długości równej długości kroku całkowania.

Wobec tego jako “średnią” pochodną przyjmijmy pochodną w środkowym punkcie przedziału. Ale jak znaleźć wartość szukanej funkcji w tym środkowym punkcie? Najprościej jest znaleźć ją korzystając z jawnej metody Eulera z krokiem połówkowym, następnie zaś obliczoną w punkcie środkowym pochodną „przenosimy” do lewego krańca przedziału i wykonujemy cały krok o długości h . Zatem

Jawna metoda punktu środkowego

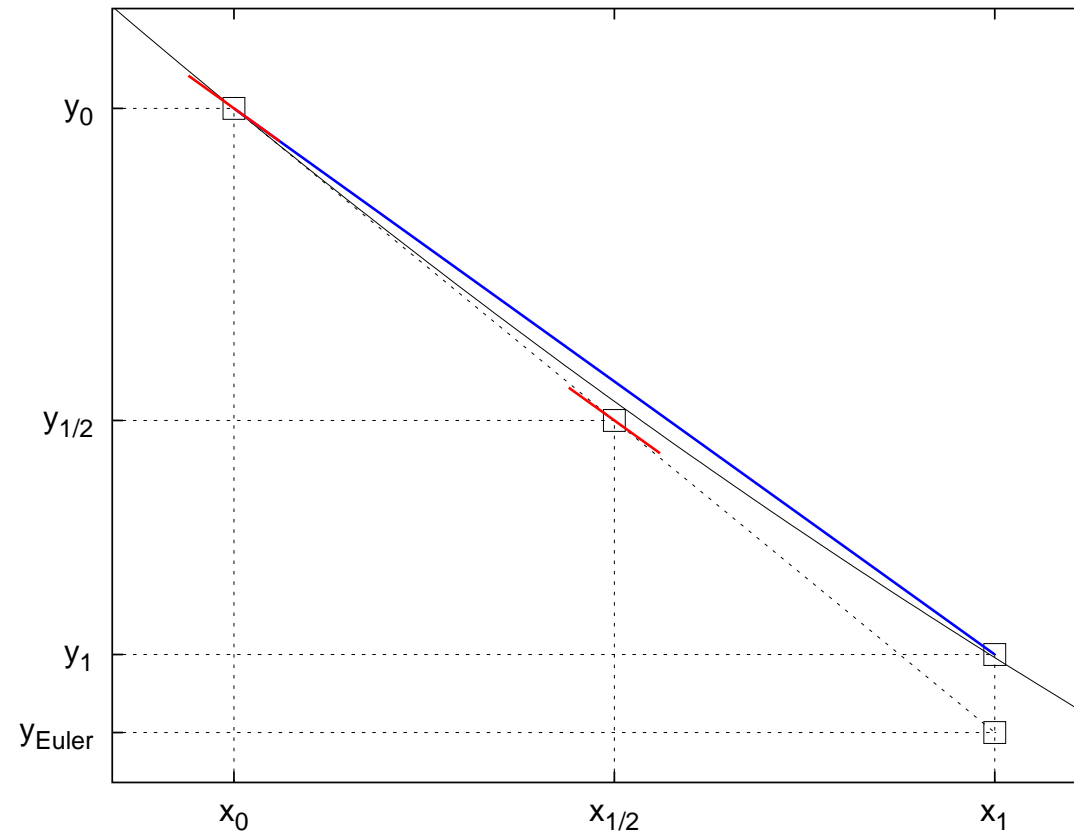
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, y_n), \quad (26a)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \quad (26b)$$

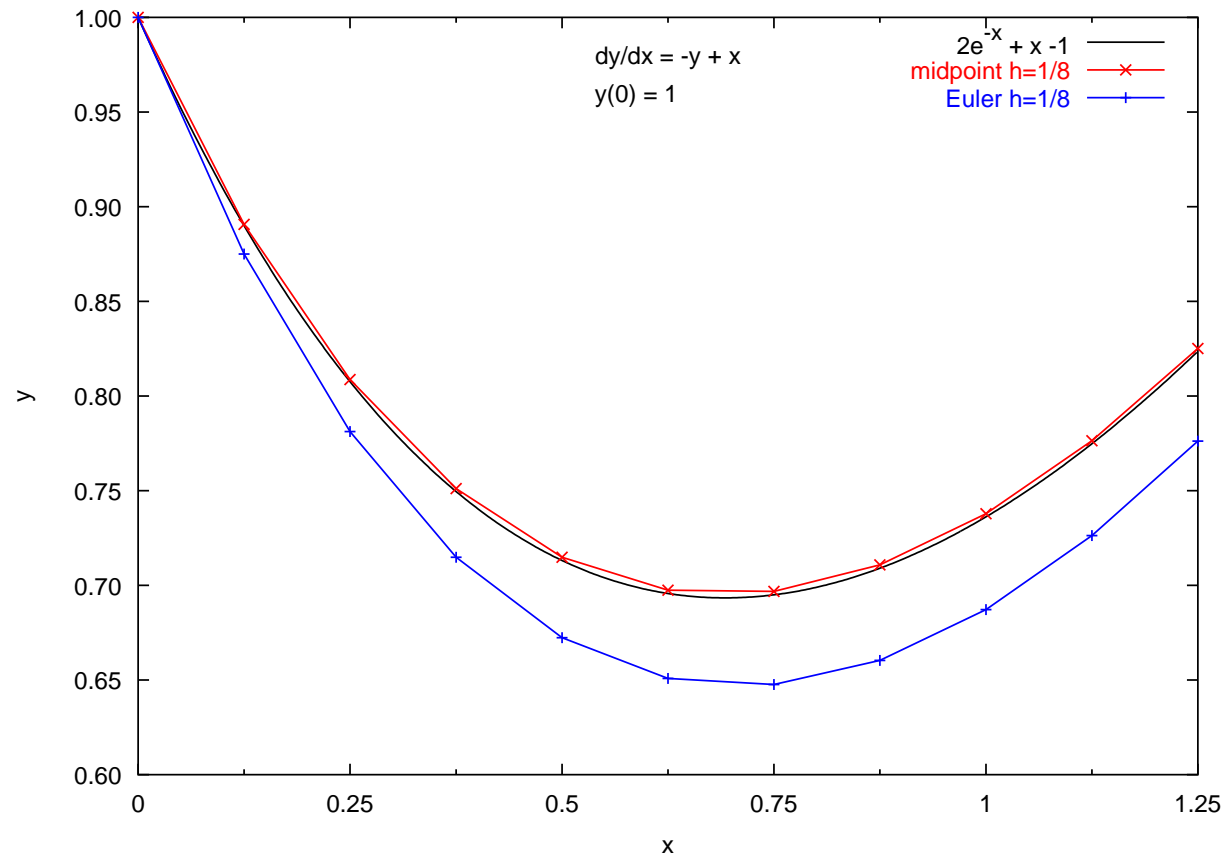
$$y_{n+1} = y_n + h\mathbf{k}_2 + O(h^3). \quad (26c)$$

Dlaczego rząd tej metody równa się 2 (odrzucone wyrazy są rzędu $O(h^{2+1})$), dowiemy się później. Podobnie później, w szerszym kontekście, przeanalizujemy stabilność tej metody.

Interpretacja geometryczna jawnej metody punktu środkowego



Przykład zastosowania jawnej metody punktu środkowego



Niejawna metoda punktu środkowego

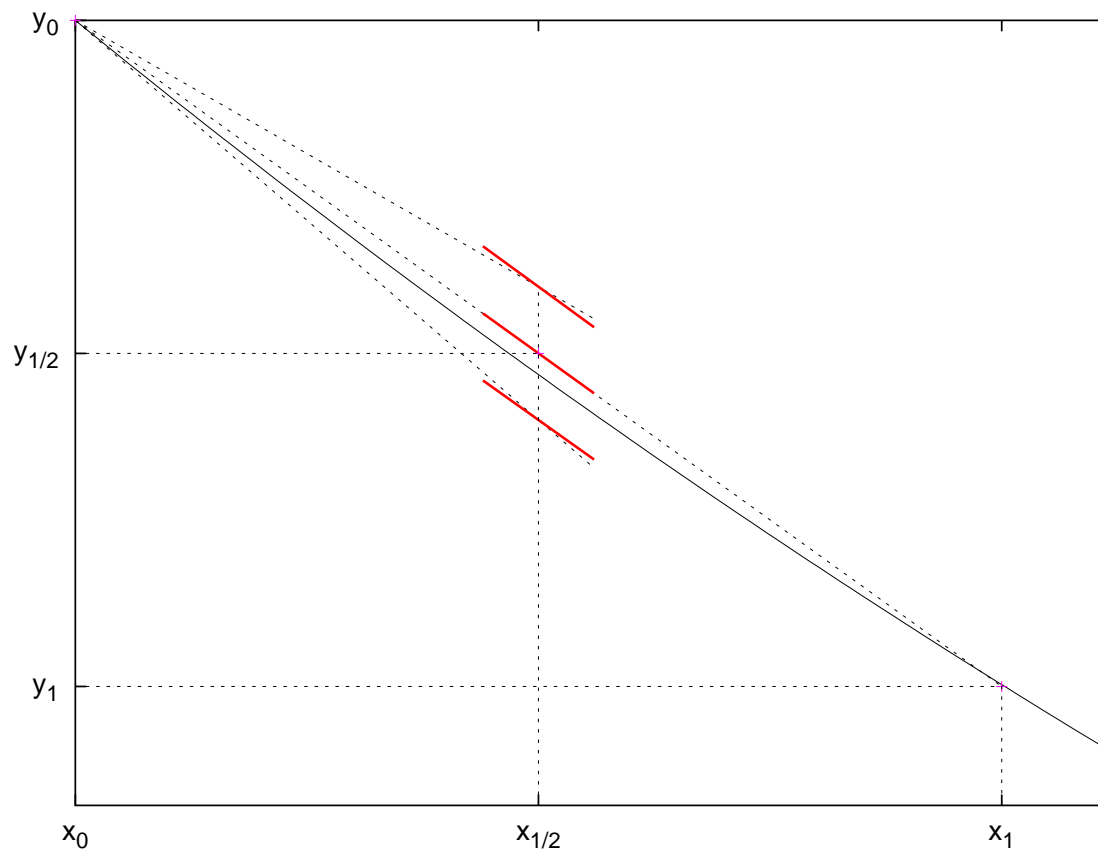
Metoda punktu środkowego *oczywiście* ma także swój wariant niejawny. W jawnej metodzie punktu środkowego konstruujemy punkt środkowy; w metodzie niejawnej *poszukujemy* punktu o tej własności, że jeżeli *cofniemy się* w kierunku wyznaczonym przez pochodną funkcji w tym punkcie, trafimy na lewy kraniec przedziału. Innymi słowy, kierunek od punktu w lewym krańcu przedziału do poszukiwanego punktu środkowego musi pokrywać się z kierunkiem pochodnej w punkcie środkowym:

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \mathbf{k}_2 \right), \quad (27a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \mathbf{k}_2 + O(h^3). \quad (27b)$$

Zauważmy, że metoda (27) *formalnie* wymaga tylko jednego obliczenia prawej strony równania różniczkowego, a mimo to jest metodą rzędu drugiego. Tego, że tak jest, dowiedzimy później.

Interpretacja geometryczna niejawnego metody punktu środkowego



Jawna metoda trapezowa

Jest szereg innych sposobów uśredniania zmian pochodnej na długości kroku całkowania. Metodą *równie dobrą*, co metoda punktu środkowego, jest metoda oparta na następującym schemacie:

1. oblicz pochodną w lewym krańcu przedziału
2. idź z krokiem Eulera do prawego krańca przedziału,
3. oblicz pochodną w osiągniętym punkcie na prawym krańcu przedziału,
4. przejdź jeszcze raz cały przedział w kierunku danym przez *średnią* z obu obliczonych pochodnych

czyli

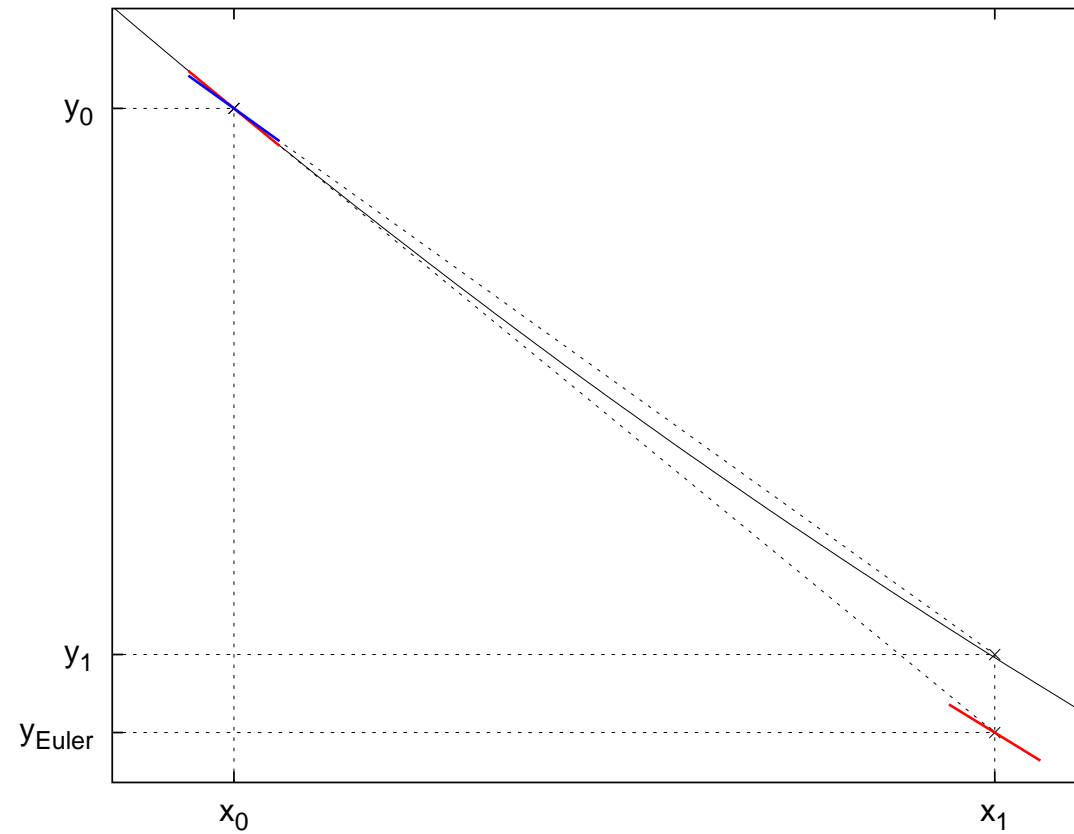
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \quad (28a)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1), \quad (28b)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} + O(h^3). \quad (28c)$$

Metoda ta bierze swoją nazwę od metody trapezowej całkowania funkcji, opartej na podobnym schemacie.

Interpretacja geometryczna metody trapezowej



Niejawna metoda trapezowa

W jawnej metodzie trapezowej “średnią” pochodną jest średnia arytmetyczna pochodnej w lewym krańcu przedziału i w eulerowskim przybliżeniu pochodnej w prawym krańcu przedziału. W *niejawnej* metodzie trapezowej, zamiast przybliżenia eulerowskiego biorę *poszukiwany* punkt, otrzymując

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} \quad (29)$$

Zauważmy, że metodę tę można w sposób równoważny zapisać w postaci

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (30a)$$

$$k_2 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}h k_1 + \frac{1}{2}h k_2\right), \quad (30b)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h (k_1 + k_2). \quad (30c)$$

Metody predyktor-korektor

Metody niejawne są kosztowne w użyciu, wymagają bowiem rozwiązywania układu równań algebraicznych, na ogół nieliniowego, w każdym kroku iteracji. Czasami “ułatwiamy” sobie życie, zastępując rozwiązanie ścisłe rozwiązaniem *samouzgodnionym* (*self-consistent*). Podejście to prowadzi do całej klasy metod, znanych jako *metody predyktor-korektor*. Jeśli \mathcal{F} jest pewną metodą jawną, \mathcal{G} pewną metodą niejawną, obliczamy

$$\text{predyktor: } y_{n+1}^{\text{predict}} = \mathcal{F}(h; x_n, y_n, y_{n-1}, \dots), \quad (31a)$$

$$\text{korektor: } y_{n+1}^{\text{correct}} = \mathcal{G}(h; x_n, y_{n+1}^{\text{predict}}, y_n, y_{n-1}, \dots). \quad (31b)$$

Krok korektora możemy iterować.

Niejawna metoda trapezowa w postaci predyktor-korektor

Dla niejawnej metody trapezowej wygląda to tak:

$$y_{n+1}^{\text{predict}} = (\text{obliczony z jawnej metody trapezowej}), \quad (32a)$$

$$y_{n+1}^{\text{correct}_1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{\text{predict}})}{2}, \quad (32b)$$

$$y_{n+1}^{\text{correct}_s} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{\text{correct}_{s-1}})}{2}, \quad s = 2, 3, \dots (32c)$$

Uwagi

- Wiadomo, że często rozwiązania samouzgodnione różnią się od rozwiązań dokładnych układów równań algebraicznych.
- W praktyce wykonuje się tylko kilka (niewiele!) kroków korektora — w przeciwnym razie zysk na czasie wykonania jest niewielki lub nie ma go wcale.
- Metody predyktor-korektor są metodami *jawnymi*, a zatem na ogół *nie mają* korzystnych własności stabilności, typowych dla metod niejawnych.

Metody punktu środkowego oraz metody trapezowe, jawne i niejawne, to tylko szczególne sposoby uwzględniania zmienności pochodnej w trakcie kroku całkowania. Należą one do bardzo szerokiej kategorii, znanej ogólnie jako

metody Rungego–Kutty