Fizyka dla firm — Matematyka

33. Formy różniczkowe

Krzywe

Całki krzywoliniowe

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

26 kwietnia 2023

Pochodna zupełna — przypomnienie

Niech będzie dana funkcja N zmiennych $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, klasy (co najmniej) C_2. Przypuśćmy, że poszczególne zmienne, $x_1, x_2, \dots, x_N$, same są funkcjami pewnej zmiennej t. Ile wynosi pochodna df/dt?

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\frac{dx_N}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ponieważ funkcja f jest klasy C_2, zachodzi

$$
\forall i, j : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}
\tag{2}
$$

Pochodne mieszane są sobie równe.

Różniczka zupełna

Niech $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy (co najmniej) C_2. Wyrażenie

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \cdot dx_N \tag{3}$$

nazywam różniczką zupełną funkcji f w pewnym punkcie, mianowicie w tym, w którym obliczane są wszystkie pochodne cząstkowe. Różniczka zupełna opisuje zmianę funkcji, gdy poszczególne zmnienne *niezależnie* zmieniają się o infinitezymalnie małe wielkości, odpowiednio, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_N$.

Zauważmy, że ponieważ df jest różniczką funkcji klasy C_2, pochodne mieszane z założenia są sobie równe.

Różniczka zupełna określa geometrię hiperpłaszczyzny lokalnie stycznej do N wymiarowego "wykresu" funkcji f.

Forma różniczkowa

Uogólnieniem wyrażenia (3) jest wyrażenie

$$\begin{aligned} DQ &= u_1(x_1,x_2,\dots,x_N)dx_1 + u_2(x_1,x_2,\dots,x_N)dx_2 + \dots \\ &+ u_N(x_1,x_2,\dots,x_N)dx_N \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $u_1, u_2, \dots, u_N$ są pewnymi funkcjami klasy (co najmniej) C_1. Jeżeli dla każdej pary i, j zachodzi

$$\forall\, i,j = 1,\dots,N : \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{5}$$

wyrażenie (4) możemy traktować jako różniczkę zupełną pewnej funkcji; warunek (5) jest wówczas warunkiem równości pochodnych mieszanych (2).

Jeżeli dla choć jednej pary i, j warunek (5) *nie* zachodzi, wyrażenie (4) *nie* jest różniczką zupełną żadnej funkcji. Formę różniczkową (4) nazywam wówczas formą Pfaffa.

Przykład 1

Forma różniczkowa

$$df = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \tag{6a}$$

jest różniczką zupełną, gdyż

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \tag{6b}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \tag{7}$$

Proszę to porównać ze wzorem na pochodną zupełną (1).

Czynnik całkujący

Niech (4) będzie formą Pfaffa. Jeżeli istnieje taka funkcja $\mu = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, że wyrażenie

$$\mu(x_1,\ldots,x_N)u_1(x_1,\ldots,x_N)dx_1 + \cdots + \mu(x_1,\ldots,x_N)u_N(x_1,\ldots,x_N)dx_N \tag{8}$$

jest różniczką zupełną, to znaczy

$$\forall\, i,j = 1,\ldots,N : \frac{\partial(\mu \cdot u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu \cdot u_j)}{\partial x_i} \tag{9}$$

formę Pfaffa (4) nazywam całkowalną, a funkcję μ nazywam czynnikiem całkującym.

Twierdzenie: Każda forma Pfaffa dwu zmiennych posiada czynnik całkujący.

Nie każda forma trzech i więcej zmiennych jest całkowalna.

Przykład 2

Forma różniczkowa

$$DQ = \frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy \tag{10a}$$

nie jest różniczką zupełną, gdyż

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2} \tag{10b}$$

Jednak forma Pfaffa (10a) posiada czynnik całkujący $\mu = y^2$. Istotnie, wyrażenie

$$y^2 \cdot \frac{1}{y}dx + y^2 \cdot \frac{x}{y^2}dy = y\,dx + x\,dy \tag{10c}$$

jest różniczką zupełną:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy \tag{10d}$$

Uwaga! Dla form różniczkowych dwu zmiennych

$$DQ = u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy \tag{11}$$

czynnik całkujący *często* (choć nie zawsze!) można znaleźć zakładając, że jest on funkcją tylko jednej zmiennej: $\mu = \mu(x)$ lub $\mu = \mu(y)$.

Twierdzenie:

1° Jeżeli wyrażenie

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{12a}$$

jest funkcją wyłącznie zmiennej x, czynnik całkujący $\mu = \mu(x)$ i jest on postaci

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\right) \tag{12b}$$

2° Jeżeli wyrażenie

$$\frac{1}{u}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{13a}$$

jest funkcją wyłącznie zmiennej y, czynnik całkujący $\mu = \mu(y)$ i jest on postaci

$$\mu(y) = \text{exp}\left(\int \frac{1}{u}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy\right) \tag{13b}$$

Istnieją także warunki istnienia bardziej ogólnych form czynników całkujących.

Przykład 3

Czy forma różniczkowa

$$DQ = \frac{y^2}{x}\,dx + y\,dy \tag{14a}$$

jest różniczką zupełną? Liczymy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}y = \frac{2y}{x} - 0 = \frac{2y}{x} \neq 0 \tag{14b}$$

a więc podana forma różniczkowa nie jest różniczką zupełną. Jednak

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}y\right) = \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{x} = \frac{2}{x} \tag{14c}$$

jest funkcją tylko zmiennej x, istnieje czynnik całkujący mający postać

$$\mu = \exp\left(\int\frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(2\ln x + \tilde{C}) = C\,\exp\left(\ln x^2\right) = C\,x^2\,, \tag{14d}$$

gdzie $\tilde{C}, C = \exp(\tilde{C})$ są stałymi. Przyjmijmy $C = 2$. Po przemnożeniu przez czynnik całkujący $\mu = 2x^2$, podana forma różniczkowa przybiera postać

$$df = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy \tag{14e}$$
$$f = x^2y^2 \tag{14f}$$

Przykład 4

Czy forma różniczkowa

$$DQ = (x^2 + y)\, dx - x\, dy \tag{15a}$$

jest różniczką zupełną?

Sprawdzamy:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) - \frac{\partial}{\partial x}(-x) = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \tag{15b}$$

Ponieważ jednak

$$\frac{1}{-x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) - \frac{\partial}{\partial x}(-x)\right) = -\frac{2}{x} \tag{15c}$$

jest funkcją wyłącznie zmiennej x, $\mu = \mu(x)$ oraz

$$\mu = \exp\left(-2\int\frac{dx}{x}\right) = \frac{C}{x^2} \tag{15d}$$

Wyrażenie

$$df = \frac{1}{x^2}\cdot(x^2+y)\,dx + \frac{1}{x^2}\cdot(-x)\,dy = \left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy \tag{15e}$$

jest różniczką zupełną.

$$f(x,y) = x - \frac{y}{x} \tag{15f}$$

Zadanie

Czy forma różniczkowa

$$DQ = y\,dx - \frac{2x + y}{y^2}\,dy \tag{16}$$

jest różniczką zupełną? Jeśli nie, znajdź jej czynnik całkujący. Bonus: Znajdź funckcję, której różniczka ma postać (16), po ewentualnym przemnożeniu prawej strony przez czynnik całkujący.

Krzywe na płaszczyźnie

Wykres funkcji ciągłej jednej zmiennej rzeczywistej jest krzywą na płaszczyźnie, czyli zbiorem punktów $\{(x, f(x)) : x \in D\}$, gdzie D jest dziedziną funkcji $f(x)$ i dodatkowo jest przedziałem właściwym lub zbiorem jednostronnie lub obustronnie nieskończonym. Warunki, że dziedzina nie jest "pokawałkowana", a funkcja jest ciągła, stanowią, że jej wykres jest "krzywą" w potocznym rozumieniu tego słowa.

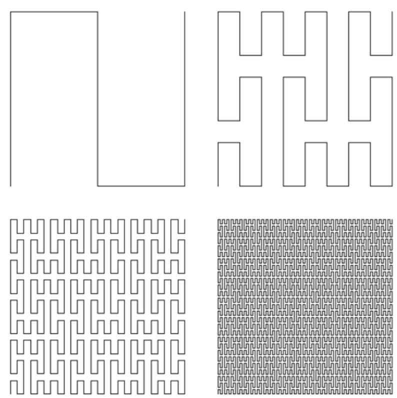
Funkcja nie musi być przy tym dana jawnym wzorem — może być funkcją uwikłaną.

Są jednak krzywe, które *nie* są wykresami jakiejść funkcji z uwagi na brak jednoznaczności. Okazuje się, że ścisłe zdefiniowanie pojęcia krzywej jest trudniejsze, niż to się może wydawać. My przyjmujemy następującą definicję:

Krzywą nazywam dowolne ciągłe odwzorowanie $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, gdzie I jest pewnym przedziałem liczb rzeczywistych: właściwym ($I = [a, b]$, najczęściej przyjmuje się $I = [0, 1]$) bądź jednostronnie lub obustronnie nieskończonym. Innymi słowy, krzywa to zbiór punktów $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$, a funkcje $\varphi(t), \psi(t)$ są ciągłe.

Krzywa Peano

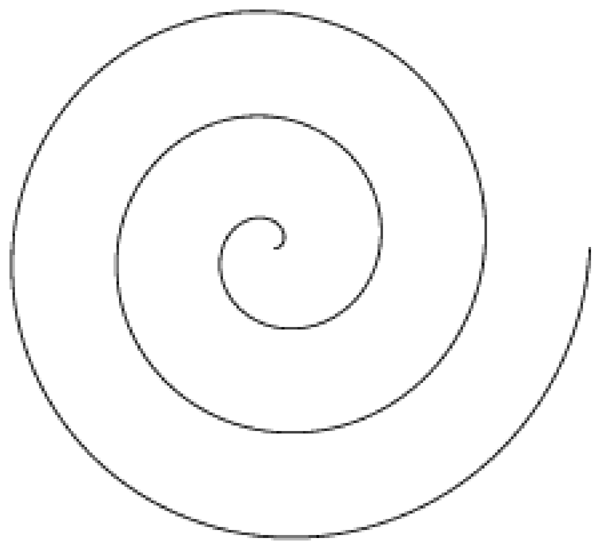
Powyższa definicja uważana jest za wadliwą, gdyż pozwala uznać za “krzywe” obiekty w pewnym sensie “patologiczne”, na przykład **ciągłe** odwzorowanie odcinka $[0, 1]$ w kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Krzywą taką nazywa się krzywą Peano (właściwie powinno się mówić “krzywa Peana”). Nam jednak definicja podana na stronie 16 wystarcza.



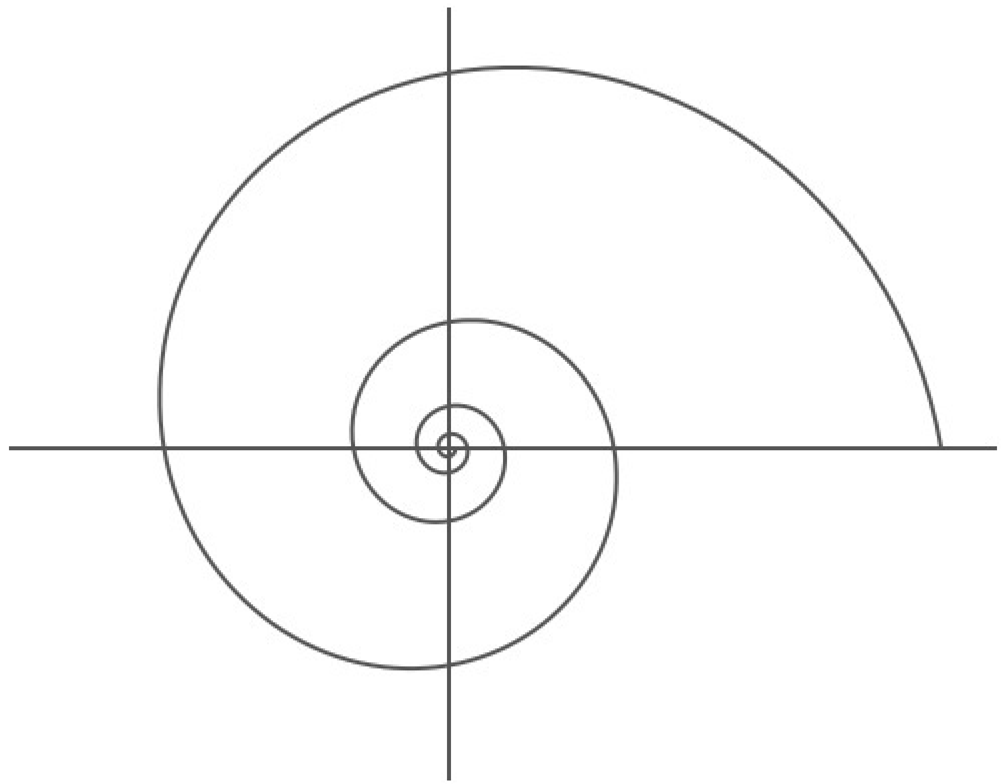
Cztery etapy konstrukcji krzywej Peano.
Grafika autorstwa Autorstwa Gunther-commonswiki — Praca własna, CC BY-SA 3.0,
`https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=206015`

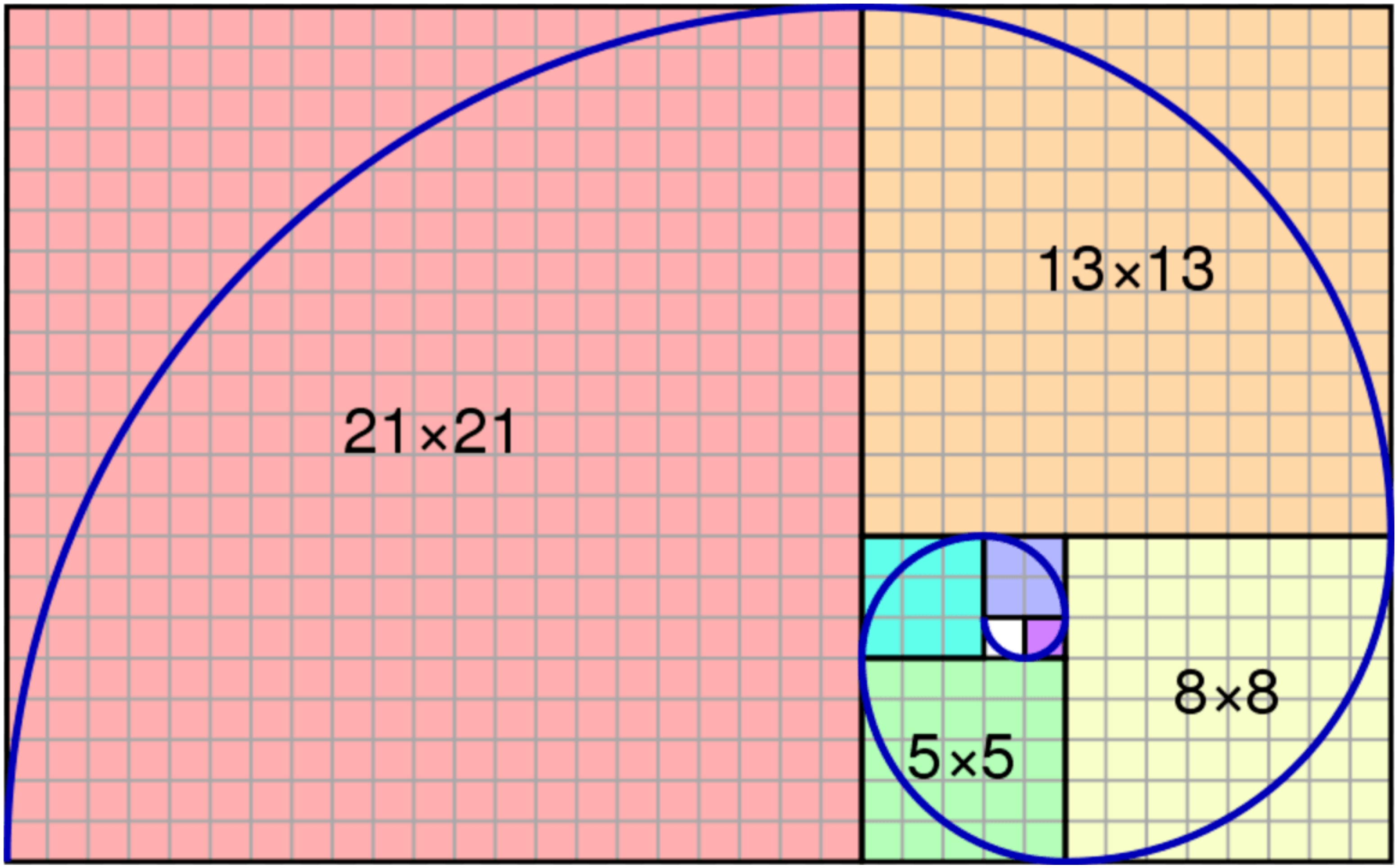
Przykład 5

Spirala Archimedesa $r = a \cdot \varphi\,,\ a = \mathrm{const} > 0$.

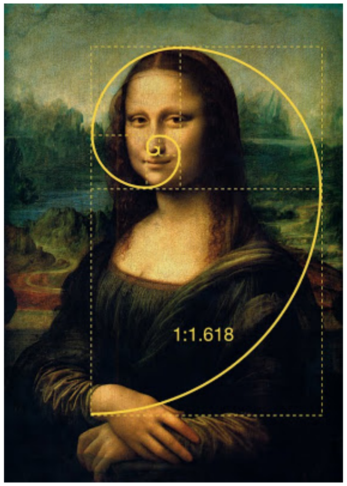


Spirala logarytmiczna $r = a \cdot e^{k\varphi}$, $a = \text{const} > 0$, $k \neq 0$.





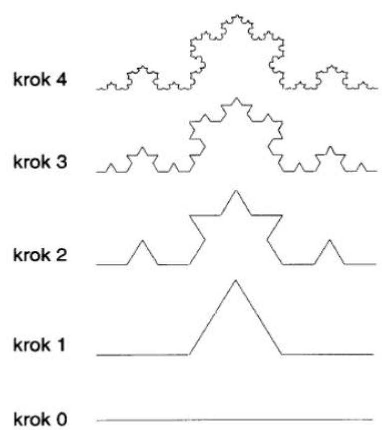
Spirala logarytmiczna $k = (\sqrt{5} - 1)/2$

 
1:1.618

Krzywa gładka

Krzywą $(\varphi(t), \psi(t))$ nazywam gładką, jeżeli funkcje φ, ψ są klasy C_1.

Krzywe, które w żadnym punkcie nie są różniczkowalne, nazywam fraktalami.



Początkowe etapy konstrukcji krzywej Kocha

Styczna i normalna

Styczna do *wykresu* funkcji w punkcie (x_0, y_0), przy czym $y_0 = f(x_0)$, dana jest równaniem

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{17a}$$

a wobec tego normalna dana jest przez

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \tag{17b}$$

gdzie $f'(x_0)$ jest pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Wyrażenia (17) można natychmiast uogólnić na funkcje dane w sposób uwikłany, przy czym do obliczenia $f'(x_0)$ należy użyć odpowiednich wzorów na pochodną funkcji uwikłanej.

W przypadku krzywej danej parametrycznie

$$\begin{cases} x & = & \varphi(t) \\ y & = & \psi(t) \end{cases} \tag{18}$$

najpierw obliczamy różniczki

$$\begin{cases} dx & = & \varphi'(t)\big|_{t_0}\, dt \\ dy & = & \psi'(t)\big|_{t_0}\, dt \end{cases} \tag{19a}$$

po czym obliczamy

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\varphi'(t)\big|_{t_0}}{\psi'(t)\big|_{t_0}} \tag{19b}$$

przy czym t_0 jest punktem, dla którego $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, w którym wyznaczamy styczną i normalną.

W punktach, w którcyh pochodna dy/dx nie istnieje, nie można wyznaczyć ani prostej stycznej, ani prostej normalnej do krzywej.

Wektor styczny i normalny

Wyrażenia (17) dają równania na prostą styczną i normalną do krzywej. Niekiedy potrzebne są unormowane *wektory*, odpowiednio, styczne i normalne do krzywej.

Korzystając ze wzorów na wektor kierunkowy prostej i z (17), widzimy, że wektor styczny do krzywej dany jest wyrażeniem

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}} \cdot \left[1, f'(x)\right] \tag{20}$$

natomiast wektor normalny

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(f'(x)\right)^2}}} \cdot \left[1, -\frac{1}{f'(x)}\right] \tag{21}$$

Pochodną wyliczamy w sposób adekwatny do sposobu zadania krzywej, w punkcie leżącym na krzywej.

Przykład 6

Wyznacz styczną i normalną do spirali Archimedesa:

$$r = a \cdot \varphi \tag{22a}$$

Przechodząc do współrzędnych kartezjańskich mamy

$$\begin{cases} x & = & a\varphi \cos\varphi \\ y & = & a\varphi \sin\varphi \end{cases} \tag{22b}$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a\varphi \cos\varphi)'}{(a\varphi \sin\varphi)'} = \frac{\cos\varphi - \varphi \sin\varphi}{\sin\varphi + \varphi \cos\varphi} = \left.\frac{1 - \varphi \operatorname{tg}\varphi}{\varphi + \operatorname{tg}\varphi}\right|_{\varphi_0} \tag{22c}$$

gdzie φ_0 jest kątem opisującym pewien punkt na spirali. W takim punkcie $y_0/x_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$. Zatem równanie stycznej ma postać

$$y = \frac{x_0 - y_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0}}{x_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + y_0}(x - x_0) + y_0 \tag{22d}$$

i analogicznie dla równania normalnej.

Pochodna wektora o ustalonej długości

Przypuśćmy, że pewien wektor $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n] \in \mathbb{R}^N$ ma ustaloną długość:

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2 = s^2 = \text{const} \tag{23}$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $s^2 = 1$.

Wektor $\mathbf{s}$ może się zmieniać w zależności od pewnej zmiennej t, ale tak, aby warunek (23) był zachowany. Oznacza to, że może się zmieniać kierunek wektora, ale nie jego długość. Zróżniczkujmy wyrażenie (23):

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right) = \frac{d}{dt}\text{const} \tag{24a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right) = 0 \tag{24b}$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2s_i\frac{ds_i}{dt} = 0 \tag{24c}$$

$$\sum_{i=1}^{N} s_i\frac{ds_i}{dt} = 0 \tag{24d}$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Zauważmy, że po lewej stronie w warunku (24d) mamy iloczyn skarny dwu wektorów, s oraz $d\mathrm{s}/dt$.

Zatem

$$\mathbf{s} \circ \frac{d\mathbf{s}}{dt} = 0 \tag{25}$$

Warunek (25) oznacza, że pochodna wektora o ustalonej długości jest prostopadła do tego wektora.

Przykład: Ruch jednostajny po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu najłatwiej przedstawić we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} r & = \text{const} \\ \varphi & = \omega t \end{cases} \tag{26}$$

We współrzędnych kartezjańskich mamy wobec tego opis parametryczny:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{bmatrix} \tag{27}$$

Prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu wyraża się wzorem

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{bmatrix} \tag{28}$$

Zauważmy, że $v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = r\omega =$ const. Nie dziwi zatem, że

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \equiv \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \tag{29}$$

jest wektorem prostopadłym do wektora $\mathbf{v}$: $\mathbf{a} \circ \mathbf{v} = 0$. Jednocześnie $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x}$ oraz $\mathbf{x} \circ \mathbf{a} = -r^2\omega^2 < 0$, czyli wektor $\mathbf{a}$ jest antyrównoległy do wektora $\mathbf{x}$: Jeśli wektor $\mathbf{x}$ jest wektorem wodzącym punktu na okręgu, a więc wskazuje *od* środka układu do punktu na okręgu, wektor $\mathbf{a}$ wskazuje od punktu na okręgu *do* środka układu współrzędnych. Wektor $\mathbf{a}$ (29) nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym.

Wartość przyspieszenia dośrodkowego wynosi
$a = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2 \omega t + r^2\omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2 = v^2/r$.