Fizyka dla firm — Matematyka

32. Całki wielokrotne — przykłady

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

Przykłady do samodzielnego przeanalizowania

Przykład 1

Oblicz pole elipsy opisanej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ a > 0\,, b > 0 \tag{1a}$$

Pole dane jest całką podwójną

$$S = \iint\limits_{E} dx\,dy \tag{1b}$$

gdzie E jest elipsą (1a). Dokonuję zmiany zmiennych, wprowadzając *współrzędne eliptyczne*:

$$\begin{cases} x &= a\,r\,\cos\phi \\ y &= b\,r\,\sin\phi \end{cases} \tag{1c}$$

W tych zmiennych $\phi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$ (zauważmy, że na elipsie (1a) zachodzi $r = 1$). Jak łatwo sprawdzić, Jakobian przekształcenia (1c) wynosi $J = abr$. Wobec tego

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 abr\, dr = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 = \pi ab \tag{1d}$$

Przykład 2

Znajdź objętość walca eliptycznego o podstawie będącej elipsą (1a) i wysokości h.

Wprowadzam współrzędne eliptyczno-cylindryczne

$$\begin{cases} x &= a\,r\,\cos\phi \\ y &= b\,r\,\sin\phi \\ z &= z \end{cases} \tag{2a}$$

Jakobian wynosi $J = abr$. Jeśli wprowadzę układ współrzędnych tak, aby jego środek pokrywał się ze środkiem walca a osie odpowiadały charakterystycznym osiom bryły, dostanę

$$V = \iiint\limits_{\text{walec}} dx\,dy\,dz = ab \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz = \pi abh \tag{2b}$$

Przykład 3

Znajdź objętość elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \; a > 0\,, b > 0\,, c > 0 \tag{3a}$$

Objętość dana jest całką potrójną

$$V = \iiint\limits_{E_3} dx\, dy\, dz \tag{3b}$$

gdzie E_3 jest elipsoidą (3a).

Postępując, w pewnym sensie, podobnie, jak w pierwszym przykładzie, wprowadzamy *współrzędne elipsoidalne*:

$$\begin{cases} x &= a\,r\,\cos\theta\,\sin\phi \\ y &= b\,r\,\cos\theta\,\sin\phi \\ z &= c\,r\,\sin\theta \end{cases} \tag{3c}$$

Zmienne należą do przedziałów $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $r \in [0, 1]$ (powierzchnia elipsoidy). Jakobian przekształcenia (3c) wynosi $J = -abcr^2 \cos\theta$, $|J| = abcr^2 \cos\theta$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} V &= abc \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^1 r^2\, dr \\ &= 2\pi abc\, [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 \\ &= 2\pi abc (1 - (-1)) \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{4}{3}\pi abc \end{aligned} \tag{3d}$$

Moment bezwładności

Dany jest pewien układ punktów materialnych o masach m_i i współrzędnych (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$. Dana jest także pewna prosta, P. Momentem bezwładności układu punktów względem zadanej prostej nazywam wielkość

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \, d_i^2$$

gdzie d_i jest odległością i-tego punktu od prostej P.

Jeżeli zamiast zbioru punktów mam pewną bryłę, sumowanie w powyższym wyrażeniu należy zastąpić całkowaniem po całej objętości bryły, zamiast m_i biorąc gęstość.

Przykład 4

Znajdźmy moment bezwładności jednorodnego, nieskończenie cienkiego koła (pełnego), o masie M i promieniu R, względem osi prostopadłej do płaszczyzny koła i przechodzącej przez jego środek.

Gęstość (powierzchniowa) wynosi

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2} \tag{4a}$$

Kwadrat odległości punktu wewnętrznego koła od zadanej osi wynosi $d^2 = x^2 + y^2$. Wobec tego

$$I = \iint\limits_K \frac{M}{\pi R^2}(x^2 + y^2)\, dx\, dy \tag{4b}$$

gdzie K jest interesującym nas kołem. Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych

$$I = \frac{M}{\pi R^2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{R} r^2 \cdot r\, dr = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \int\limits_0^{R} r^3\, dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{4c}$$

Zwróćmy uwagę, że jedno “r” pojawiło się z Jakobianu.

Przykład 5

Znajdź moment bezwładności jednorodnego walca eliptycznego o podstawie będącej elipsą (1a), masie M i wysokości h, względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości i zawierającej wysokość walca.

Moment bezwładności dany jest przez

$$I = \iiint\limits_{\text{walec}} \rho d^2 \, dx \, dy \, dz \tag{5a}$$

gdzie

$$\rho = \frac{M}{\pi a b h} \tag{5b}$$

natomiast d^2 jest odległością od osi walca:

$$d^2 = x^2 + y^2 \,. \tag{5c}$$

Wprowadzam współrzędne eliptyczno-cylindryczne (2a) tak, że środek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem walca. W tych współrzędnych

$$d^2 = x^2 + y^2 = a^2 r^2 \cos^2\phi + b^2 r^2 \sin^2\phi \tag{5d}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{\pi abh} \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_0^1 r^2 \cdot \underbrace{abr}_{\text{Jakobian}} dr \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\, d\phi \\ &= \frac{M}{4\pi}\left[a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi + b^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi \right] \\ &= \frac{M}{4\pi}(a^2\pi + b^2\pi) = \frac{1}{2} M\, \frac{a^2+b^2}{2} \end{aligned} \tag{5e}$$

Przykład 6

Dany jest nieskończony, sferycznie symetryczny obłok gazu, któreo gęstość w funkcji odległości od środka obłoku ma postać

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^3}\,. \tag{6a}$$

Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez obłok w odległości L od jego środka.

Początek tego zadania — wszystkie kroki nie wymagające jawnej znajomości gęstości — jest rozwiązany w wykładzie 31, wzór (35g). Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[\int\limits_0^L \frac{r^2}{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^3}\,dr + L\int\limits_L^\infty \frac{r}{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^3}\,dr\right] \\
&= -\frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[r_0^3\int\limits_0^{L/r_0} \frac{s^2}{1+s^3}\,ds + r_0^2 L\int\limits_{L/r_0}^\infty \frac{s}{1+s^3}\,ds\right] \qquad (6b)
\end{aligned}
$$

Musimy obliczyć dwie całki obecne w (6b).

Pierwsza z nich:

$$
\int \frac{s^2}{1+s^3}\,ds = \frac{1}{3}\ln(1+s^3) \qquad (6c)
$$

wobec czego

$$\int\limits_0^{L/r_0} \frac{s^2}{1+s^3}\,ds = \frac{1}{3}\ln(1+s^3)\Big|_0^{L/r_0} = \frac{1}{3}\ln\left(1+\left(\frac{L}{r_0}\right)^3\right) \tag{6d}$$

Drugą całkę obliczymy poprzez rozkład na ułamki proste. Ponieważ

$$1+s^3 = (1+s)(1-s+s^2)\,, \tag{6e}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{1+s^3} &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s+1}{1-s+s^2} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+s}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2s-1}{s^2-s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}
\tag{6f}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{s}{1+s^3}\,ds &= -\frac{1}{3}\ln(1+s)+\frac{1}{6}\ln(s^2-s+1) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{s^2-s+1}{s^2+2s+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6g}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{L/r_0}^{\infty}\frac{s}{1+s^3}\,ds &= -\frac{1}{6}\ln\frac{L^2-Lr_0+r_0^2}{L^2+2Lr_0+r_0^2} \\
&+ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{L}{r_0}-\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6h}
$$

Ostatecznie

$$V(L) = -4\pi G\rho_0 r_0^2 \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{r_0}{L} \ln \left(1 + \left(\frac{L}{r_0} \right)^3 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{L}{r_0} - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{1}{6} \ln \frac{L^2 - L r_0 + r_0^2}{L^2 + 2 L r_0 + r_0^2} \right] \tag{6i}$$

Jak widać, nawet tak koncepcyjnie proste zagadnienie prowadzi do żmudnego całkowania ☹

Zauważmy, że dla $L \gg r_0$

$$V(L) \simeq -4\pi G\rho_0 r_0^2 \, \frac{\ln(L/r_0)}{L/r_0} \tag{6j}$$

a więc spada do zera wolniej, niż $1/L$.

Ponieważ

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^3)}{t} = 0\,, \tag{6k}$$

$$\lim_{L\to 0} V(L) = -\frac{8\pi^2 G\rho_0 r_0^2}{3\sqrt{3}} \tag{6l}$$