

# Fizyka dla firm — Matematyka

## 31. Całki wielokrotne

P. F. Góra

[https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel\\_gora](https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora)

19 kwietnia 2023

## Całka oznaczona funkcji dwóch zmiennych

Całkę oznaczoną funkcji dwóch zmiennych definiujemy podobnie jak całkę Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Niech będzie dany pewien obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Obszar  $D$  dzielimy na elementy  $d_i$  takie, że  $\bigcup_i d_i = D$  oraz poszczególne elementy  $d_i, d_j$  mają co najwyżej wspólne krawędzie (formalnie:  $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow \mu(d_i \cap d_j) = 0$ ), gdzie  $\mu(\cdot)$  oznacza miarę (powierzchnię) jakiegoś podzbioru  $\mathbb{R}^2$ . Następnie w każdym elemencie  $d_i$  wybieramy punkt  $(x_i, y_i)$  i tworzymy sumę Riemanna

$$S_i = \sum_i f(x_i, y_i) \mu(d_i). \quad (1)$$

Jeżeli granica ciągu  $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$  przy  $\max(\mu(d_i)) \rightarrow 0$  istnieje i *nie zależy od sposobu wyboru punktów*  $(x_i, y_i)$ , nazywamy ją **całką funkcji  $f(x, y)$  po obszarze  $D$** :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i \quad (2)$$

**Twierdzenie:** Jeżeli funkcja jest ciągła i ograniczona na obszarze  $D$ , jej całka (2) po tym obszarze istnieje.

Powyższą definicję i twierdzenie łatwo uogólnić na całki funkcji trzech, czterech, ... zmiennych.

## Powierzchnia i objętość

Ponieważ  $\bigcup_i d_i = D$ ,  $\sum_i \mu(d_i) = \mu(D)$ . Z (2) natychmiast wynika, że

$$\iint_D dx dy = \mu(D) \quad (3)$$

czyli całka  $\iint_D dx dy$  daje w wyniku powierzchnię (miarę) obszaru całkowania.

Z kolei występujące w sumie (1) wyrażenia  $f(x_i, y_i) \cdot \mu(d_i)$  możemy interpretować jako objętości graniastosłupów (krzywoliniowych) o podstawie  $d_i$  i wysokości  $f(x_i, y_i)$ ,  $(x_i, y_i) \in d_i$ . Wobec tego całkę (2) możemy interpretować jako objętość zawartą pomiędzy dwuwymiarowym wykresem funkcji  $f(x, y)$  a obszarem  $D$ , przy czym przyczynki odpowiadające ujemnym wartościom funkcji  $f$  traktujemy jako ujemne.

## Całki iterowane

**Twierdzenie o całkach iterowanych (twierdzenie Fubiniego):** Niech dany będzie obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$  ograniczony nierównościami

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \quad (4)$$

przy czym funkcje  $\varphi, \psi$  są ciągłe. Wówczas **jeżeli istnieje całka**

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

to jest ona równa

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (6)$$

## Komentarze

1. Wewnętrzną całkę w (6) obliczamy tak, jakby  $x$  było parametrem o ustalonej wartości. Obliczona całka wewnętrzna, po uwzględnieniu granic całkowania, jest funkcją zmiennej  $x$  i staje się funkcją podcałkową całki zewnętrznej w (6).

2. Jeżeli zamiast (4) mamy ograniczenie postaci

$$p \leq y \leq q, \quad \tilde{\varphi}(y) \leq x \leq \tilde{\psi}(y) \quad (7)$$

wówczas w miejsce (6) mamy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_p^q dy \int_{\tilde{\varphi}(y)}^{\tilde{\psi}(y)} f(x, y) dx . \quad (8)$$

**3.** Funkcje  $\varphi, \psi$  (lub  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ ) mogą być stałe. Oznacza to, że dla całkowania po prostokącie

$$\iint_{[a,b] \times [p,q]} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_p^q f(x, y) dy = \int_p^q dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (9)$$

**4.** Twierdzenie o całkach iterowanych oraz powyższe komentarze łatwo uogólnić na przypadek całek trój- i więcejwymiarowych.

## Przykład 1

Obliczmy pole okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$ . Zauważmy, że, po pierwsze,  $-R \leq x \leq R$ , a po drugie, przy ustalonym  $x$ ,  $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ .

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = R \sin t \\ dx = R \cos t dt \\ -R \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ R \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2 \end{aligned} \tag{10}$$



## Przykład 2

Obliczmy całkę z funkcji  $\sin x \cdot \cos y$  po prostokącie  $D = [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ .

$$\begin{aligned} \iint_D \sin x \cos y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y \, dy \\ &= (-\cos x|_0^{\pi}) \cdot \left( \sin y|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 4 \quad (11) \end{aligned}$$

### Przykład 3

Niech obszar  $D$  będzie trójkątem wyznaczonym przez punkty  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, \pi/2)$ ,  $(\pi/2, -\pi/2)$ . Obliczmy

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x+y) dx dy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_{-x}^x \sin(x+y) dx = \left[ \begin{array}{l} y = t - x, dy = dt \\ -x \rightarrow 0, x \rightarrow 2x \end{array} \right] \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{2x} \sin t dt = \int_0^{\pi/2} \left( -\cos t \Big|_0^{2x} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t dt = \frac{\pi}{2} \quad (12)\end{aligned}$$

## Przykład 4

Niech  $D$  będzie obszarem ograniczonym prostymi  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $x = -1$ ,  $y = -2$ . Obliczmy

$$\begin{aligned}\iint_D (6 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 (6 - x^2 - y^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( 6x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \right) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( \frac{34}{3} - 2y^2 \right) dy = \frac{104}{3} \quad (13)\end{aligned}$$

## Przykład 5

Obliczmy

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (xy)^2 dx dy \quad (14a)$$

Jak poprzednio,  $-R \leq x \leq R$ , a przy ustalonym  $x$ ,  
 $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (xy)^2 dy = \int_{-R}^R x^2 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy \\
&= \int_{-R}^R x^2 \left( \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-R}^R x^2 (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{2}{3} R^6 \int_{-1}^1 t^2 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{\pi}{24} R^6 \tag{14b}
\end{aligned}$$

## Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej

Niech

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (15)$$

Niech odwzorowanie to przekształca pewien obszar  $\Delta$  (w zmiennych  $u, v$ ) na obszar  $D$  (w zmiennych  $x, y$ ), przy czym zachodzi

- (i) funkcje  $\varphi, \psi$  są klasy  $C_1$  w obszarze  $\Delta$ ,
- (ii) funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w obszarze  $D$ ,
- (iii) odwzorowanie wnętrza obszaru  $\Delta$  w obszar  $D$  jest wzajemnie jednoznaczne,
- (iv) wewnątrz obszaru  $D$  jacobian

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0. \quad (16)$$

Wówczas

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (17)$$

Przy zmianie zmiennych do funkcji podcałkowej wchodzi wartość bezwzględna jakobianu.

Twierdzenie to uogólnia się na całki trój- i więcejwymiarowe.

## Przykład 6

Obliczmy jeszcze raz całkę (14a), tym razem korzystając ze zmiany zmiennych na współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (xy)^2 dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{array} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r (r^2 \sin \phi \cos \phi)^2 dr \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2(2\phi) d\phi \right) \cdot \left( \int_0^R r^5 dr \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} R^6 = \frac{\pi}{24} R^6 \end{aligned} \quad (18)$$



## Przykład 7

Niech obszar  $D$  będzie kwadratem ograniczonym prostymi  $y = \pm x \pm 1$ .  
Obliczmy całkę

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy \quad (19a)$$

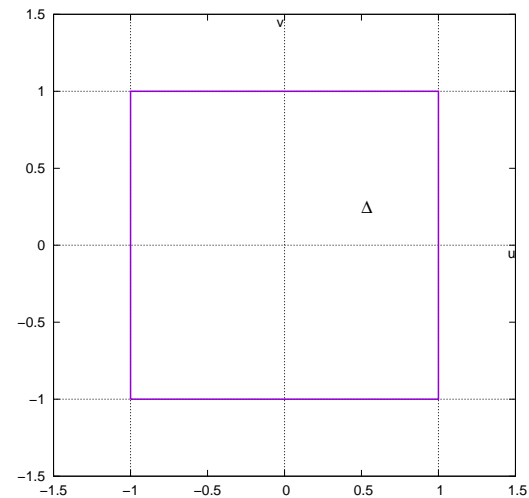
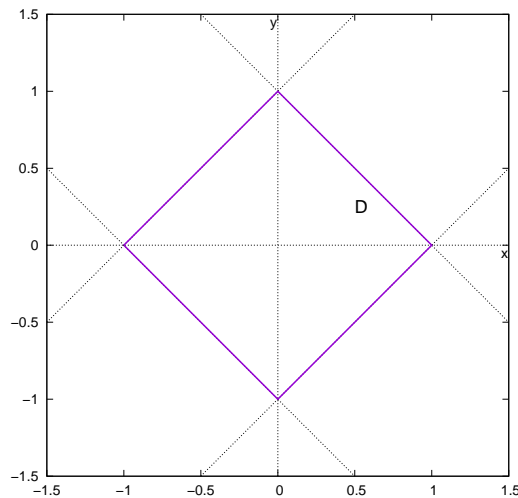
Dokonajmy następującej zmiany zmiennych:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u + v) \\ y &= \frac{1}{2}(u - v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y &= u \\ x - y &= v \end{cases} \quad (19b)$$

Jakobian przekształcenia (19b) wynosi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad (19c)$$

a obszar  $D$  jest obrazem obszaru  $\Delta$ , będącego kwadratem ograniczonym prostymi  $u = \pm 1, v = \pm 1$ .



Wobec tego

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Delta} \frac{\frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2}{1 + \frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(v-v)^2} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u du \int_{-1}^1 \frac{v}{1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2} dv \\ &= 0, \end{aligned} \tag{19d}$$

gdyż funkcja podcałkowa w wewnętrznej całce jest nieparzysta (ze względu na zmienną  $v$ ), a całkowanie przebiega po przedziale symetrycznym.

## Przykład 8

Typowym zastosowaniem całek wielokrotnych w fizyce jest obliczanie potencjałów lub sił grawitacyjnych pochodzących od rozmaitych układów mas.

Znaleźć wartość siły, z jaką przyciągają się dwa jednorodne odcinki o długościach  $l_1$  i  $l_2$ , leżące na jednej prostej, jeżeli masa pierwszego wynosi  $m_1$ , masa drugiego  $m_2$ , a odległość między środkami odcinków wynosi  $d$ .

Wprowadźmy oś współrzędnych taką, że środek masy lewego odcinka leży w punkcie  $-d/2$ , środek zaś prawego w punkcie  $d/2$ . Wówczas lewy odcinek odpowiada przedziałowi  $x_1 \in [-(d + l_1)/2, (-d + l_1)/2]$  (istotnie, średnia tego przedziału to  $-d/2$  a jego długość to  $l_1$ ), prawy zaś  $x_2 \in [(d - l_2)/2, (d + l_2)/2]$ .

Rozpatrujemy przyczynek od elementów liniowych  $dx_1$ ,  $dx_2$ , położonych w punktach, odpowiednio,  $x_1$  i  $x_2$ . Ponieważ gęstość liniowa pierwszego odcinka wynosi  $m_1/l_1$ , drugiego  $m_2/l_2$ , jako przyczynek do siły otrzymujemy

$$G \frac{\frac{m_1}{l_1} \cdot \frac{m_2}{l_2}}{(x_2 - x_1)^2}. \quad (20a)$$

Wyrażenie to należy teraz przecałkować po obu odcinkach:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \int_{(d-l_2)/2}^{(d+l_2)/2} dx_2 \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (20b)$$

I dalej, jeżeli nie pomyliłem się w rachunkach,

$$\begin{aligned}
 F &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right]_{(d-l_2)/2}^{(d+l_2)/2} \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \left( -\frac{1}{\frac{d+l_2}{2} - x_1} + \frac{1}{\frac{d-l_2}{2} - x_1} \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \left( \left[ \ln \left| \frac{d+l_2}{2} - x_1 \right| \right]_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} - \left[ \ln \left| \frac{d-l_2}{2} - x_1 \right| \right]_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \left( \ln \left| \frac{d+l_2}{2} - \frac{-d+l_1}{2} \right| - \ln \left| \frac{d+l_2}{2} + \frac{d+l_1}{2} \right| \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left| \frac{d-l_2}{2} - \frac{-d+l_1}{2} \right| + \ln \left| \frac{d-l_2}{2} + \frac{d+l_1}{2} \right| \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \ln \left| \frac{4d^2 - (l_1 - l_2)^2}{4d^2 - (l_1 + l_2)^2} \right| \tag{20c}
 \end{aligned}$$

Komentarz: W mianowniku wyrażenia (20c) występuje odejmowanie. Czy nie prowadzi to do niedopuszczalnego dzielenia przez zero? Otóż jeśli  $d$  jest odległością środków mas odcinków, a odcinki nie przekrywają się, najmniejszą możliwą wartością  $d$  jest  $(l_1 + l_2)/2$ . Odpowiada to zeru mianownika, ale jednocześnie odpowiada to sytuacji, w której odcinki stykają się. To, formalnie, prowadzi do nieskończonej wartości siły grawitacyjnej.

## Całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Funkcja  $e^{-x^2}$  nie ma funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej) wyrażającej się przez skończoną kombinację funkcji elementarnych. Jednak całka

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (21)$$

istnieje i można jej wartość znaleźć w sposób ścisły.



Zauważmy, że

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (22)$$

W całce (22) zmieniamy zmienne na biegunowe:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \quad (23)$$

gdzie czynnik “ $r$ ” pojawił się z jacobianu. W całce (23) dokonuję zwykłej

zmiany zmiennych

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[ \begin{array}{l} r^2 = u \\ 2r dr = du \\ 0 \rightarrow 0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi \left[ -e^{-u} \right]_0^{\infty} = \pi \end{aligned} \quad (24)$$

Ostatecznie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (25)$$

Wynik (25) łatwo uogólnić. Dla  $k > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{k} x = t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{k}} dt \\ -\infty \rightarrow -\infty, \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{aligned} \quad (26)$$

## Przykład 9

Na podstawie (26) widzimy, że dla każdego  $x_0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (27)$$

Całka (27) odgrywa bardzo ważną rolę w rachunku prawdopodobieństwa: funkcja

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (28)$$

jest gęstością *rozkładu normalnego* (lub *rozkładu Gaussa*) zmiennej losowej o wartości oczekiwanej  $x_0$  i wariancji  $\sigma^2$ . Całka (27) mówi, że gęstość ta jest poprawnie unormowana.

## Przykład 10

Obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx &= -\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = -\frac{d}{dk} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ &= -\sqrt{\pi} \frac{d}{dk} k^{-1/2} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} k^{-3/2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k^3}}\end{aligned}\tag{29}$$

Podobnie moglibyśmy obliczyć całki postaci  $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-kx^2} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## Przykład 11

Całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-kx^2} dx = 0 \quad (30)$$

z uwagi na nieparzystość funkcji podcałkowej. Natomiast ( $k > 0$ )

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-kx^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} kx^2 = t \\ 2kx dx = dt \\ 0 \rightarrow 0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2k} \end{aligned} \quad (31)$$

Podobnie moglibyśmy obliczać całki  $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-kx^2} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie przez podstawienie jak wyżej doprowadzamy do postaci dającej się scałkować przez części.

### Przykład 12

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2k^2} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{2k^2} \quad (32)$$

### Przykład 13

Znajdź potencjał grawitacyjny w punkcie w odległości  $L$  od środka jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$ , przy czym  $L > R$ .

Wprowadźmy układ współrzędnych o środku w środku kuli; niech badany punkt leży w punkcie o współrzędnych  $(0, 0, L)$ . Wyobraźmy sobie nieskończenie mały element kuli leżący w punkcie  $(x, y, z)$  i o objętości  $dx dy dz$ . Przyczynek do potencjału pochodzący od tego elementu wynosi

$$dV = -\frac{G\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} dx dy dz \quad (33a)$$

gdzie

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (33b)$$



jest gęstością kuli.

Całkowity potencjał obliczymy całkując  $dV$  po całej objętości kuli:

$$V = -\frac{3GM}{4\pi R^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} \quad (33c)$$

Wprowadźmy współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{cases} \quad (33d)$$

przy czym  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $r \in [0, R]$ . Jakobian odwzorowania (33d) wynosi  $r^2 \cos \theta$ . Mamy więc

$$V = -\frac{3GM}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \sin \theta}} \quad (33e)$$

Pierwsza całka daje  $2\pi$ . Zajmijmy się najbardziej wewnętrzną całką:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \sin \theta}} &= \left[ \begin{array}{l} \sin \theta = t \\ \cos \theta \, d\theta = dt \\ -\pi/2 \rightarrow -1 \\ \pi/2 \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lrt}} \\
 &= -\frac{1}{Lr} \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lrt} \Big|_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{Lr} \left( \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr} - \sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr} \right) \\
 &= -\frac{1}{Lr} (|L - r| - |L + r|) \tag{33f} \\
 &= -\frac{1}{Lr} (L - r - (L + r)) = \frac{2}{L} \tag{33g}
 \end{aligned}$$

gdyż  $L > r$ .

Zatem

$$V = -2\pi \cdot \frac{3GM}{4\pi R^3} \int_0^R r^2 \cdot \frac{2}{L} dr = -\frac{GM}{L} \quad (33h)$$

W punkcie leżącym na zewnątrz jednorodnej kuli potencjał grawitacyjny ma taką samą postać, jak potencjał grawitacyjny punktu materialnego o masie równej masie kuli, umieszczonego w środku kuli.

## Przykład 14

Znajdź potencjał grawitacyjny w punkcie w odległości  $L$  od środka jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$ , przy czym  $L < R$ , czyli *wewnątrz* tej kuli.

Całe obliczenia możemy prowadzić tak samo, jak w poprzednim przykładzie, aż do wyrażenia (33f). Mamy zatem

$$V = -\frac{3GM}{4\pi R^3} \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \left( -\frac{1}{Lr} (|L - r| - |L + r|) \right) r^2 dr \quad (34a)$$

Znak wyrażenia  $L-r$  zależy od tego czy  $0 \leq r < L$ , czy  $L < r < R$ . Musimy zatem całkę po  $dr$  rozbić na dwie całki:  $\int_0^R = \int_0^L + \int_L^R$ :

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{3GM}{2R^3} \int_0^L \left( -\frac{1}{Lr} (|L-r| - |L+r|) \right) r^2 dr \\
&\quad -\frac{3GM}{2R^3} \int_L^R \left( -\frac{1}{Lr} (|L-r| - |L+r|) \right) r^2 dr \\
&= -\frac{3GM}{2R^3} \int_0^L \frac{2r^2}{L} dr - \frac{3GM}{2R^3} \int_L^R 2r dr \\
&= -\frac{3GM}{R^3} \left\{ \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^L + \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_L^R \right\} \\
&= -\frac{3GM}{R^3} \left( \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{6} L^2 \right) \\
&= \frac{GM}{2R^3} L^2 - \frac{3GM}{2R}
\end{aligned} \tag{34b}$$

Potencjał wewnątrz kuli, jako funkcja  $L$ , jest harmoniczny. Zauważmy, że dla  $L = R$  wartości potencjałów (34b) i (33h) są równe: potencjał grawitacyjny jest ciągły na powierzchni kuli.

## Sferycznie symetryczny obłok gazu

Powyższe dwa przykłady można uogólnić: Dany jest nieskończony, sferycznie symetryczny obłok gazu, którego gęstość jako funkcja odległości od centrum obłoku wynosi  $\rho(r)$ . Znajdźmy potencjał grawitacyjny wytwarzany przez obłok w odległości  $r$  od jego centrum.

To zadanie ma sens, jeżeli (i)  $\forall r > 0 : \rho(r) \geq 0$  (gęstość nie może być ujemna) oraz (ii)  $\int_0^\infty \rho(r) dr < \infty$  (całkowita masa musi być skończona).

Jeśli powyższe dwa warunki są spełnione, możemy przystąpić do obliczeń jak w poprzednich dwu przykładach.

$$V = - \iiint \frac{G\rho(r)}{l} dx dy dz \quad (35a)$$



gdzie  $l$  jest odległością od punktu, w którym obliczamy pole.

Z uwagi na symetrię sferyczną wprowadzamy współrzędne

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{cases} \quad (35b)$$

gdzie  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Jakobian przekształcenia wynosi  $|J| = r^2 \cos \theta$ .

Badany punkt umieścimy na osi  $OZ$ , w odległości  $L$  od środka układu współrzędnych. Wobec tego

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + (r \sin \theta - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Lr \sin \theta + L^2} \end{aligned} \quad (35c)$$

W tych zmiennych potencjał

$$V = -G \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho(r) dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr \sin \theta + L^2}} d\theta \quad (35d)$$

Obliczam

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr \sin \theta + L^2}} d\theta &= \left| \begin{array}{l} r^2 - 2Lr \sin \theta + L^2 = u \\ -2Lr \cos \theta d\theta = du \\ -\pi/2 \rightarrow r^2 + 2Lr + L^2 = (r + L)^2 \\ \pi/2 \rightarrow r^2 - 2Lr + L^2 = (r - L)^2 \end{array} \right| \\
 &= -\frac{r^2}{2Lr} \int_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= -\frac{r}{L} \sqrt{u} \Big|_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \\
 &= -\frac{r}{L} \left( \sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2} \right) \quad (35e)
 \end{aligned}$$

Wobec tego

$$V = \frac{2\pi G}{L} \int_0^{\infty} r \rho(r) \left( \sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2} \right) dr \quad (35f)$$

Ponieważ  $\sqrt{(r-L)^2} = |r-L|$ , całkę po  $dr$  musimy rozbić na sumę  $\int_0^{\infty} = \int_0^L + \int_L^{\infty}$ , gdyż w punkcie  $r = L$  wyrażenie pod wartością bezwzględną

zmienia znak. Mamy

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi G}{L} \int_0^L (|r - L| - (r + L)) r \rho(r) dr \\ &+ \frac{2\pi G}{L} \int_L^\infty (|r - L| - (r + L)) r \rho(r) dr \\ &= \frac{2\pi G}{L} \left[ \int_0^L (L - r - r - L) r \rho(r) dr + \int_L^\infty (r - L - r - L) r \rho(r) dr \right] \\ &= -\frac{4\pi G}{L} \left[ \int_0^L r^2 \rho(r) dr + L \int_L^\infty r \rho(r) dr \right] \end{aligned} \quad (35g)$$

Dopiero na tym etapie korzystamy z jawnej postaci gęstości  $\rho(r)$ .

## Przykład 15

Wyniki dla jednorodnej kuli można odtworzyć, podstawiając do (35g) gęstość

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (36)$$

## Przykład 16

Przyjmijmy, że gęstość ma postać

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/r_0), \quad \rho_0 > 0, \quad r_0 > 0 \quad (37)$$

Aby znaleźć potencjał pola grawitacyjnego pochodzącego od obłoku o takiej gęstości, podstawiam do (35g):

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{4\pi G\rho_0}{L} \left[ \int_0^L r^2 \exp(-r/r_0) dr + L \int_L^\infty r \exp(-r/r_0) dr \right] \\
&= \left[ \begin{array}{l} \frac{r}{r_0} = s \\ dr = r_0 ds \\ 0 \rightarrow 0 \\ L \rightarrow L/r_0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\
&= -\frac{4\pi G\rho_0}{L} \left[ r_0^3 \int_0^{L/r_0} s^2 e^{-s} ds + Lr_0^2 \int_{L/r_0}^\infty s e^{-s} ds \right] \quad (38)
\end{aligned}$$



Całki nieoznaczone możemy policzyć przez części:

$$\int se^{-s} ds = -e^{-s}(s + 1) \quad (39)$$

$$\int s^2 e^{-s} ds = -e^{-s}(s^2 + 2s + 2) \quad (40)$$

Po obliczeniu całek oznaczonych i uporządkowaniu wyrazów,

$$V(L) = -4\pi G\rho_0 r_0^2 \left[ \left(1 + \frac{L}{r_0}\right)^2 e^{-L/r_0} + \frac{r_0}{L} (1 - e^{-L/r_0}) \right]. \quad (41)$$

Potencjał (41) *nie* jest osobliwy w zerze.

$$\lim_{L/r_0 \rightarrow 0} = -8\pi G\rho_0 r_0^2. \quad (42)$$

Dla  $L/r_0 \gg 1$

$$V(L) \simeq -\frac{4\pi G\rho_0 r_0^3}{L}, \quad (43)$$

czyli zachowuje się jak potencjał Coulombowski. Najciekawsze jest to, że potencjał (41) ma minimum.

