Fizyka dla firm — Matematyka

27. Funkcje wielu zmiennych

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

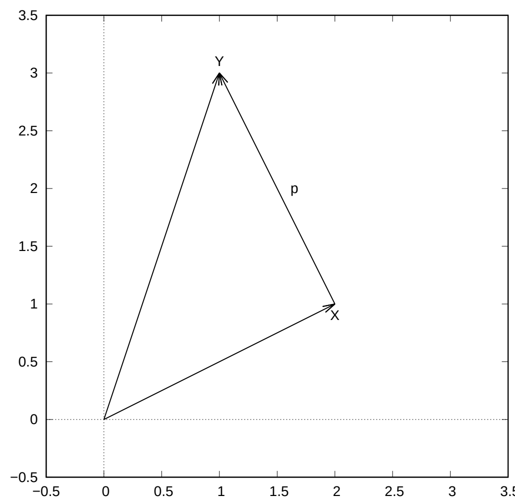
8 marca 2023

Dodawanie punktów i wektorów ☺

Punkt w przestrzeni $X \in \mathbb{R}^N$ można utożsamiać z jego wektorem wodzącym $\vec{X}$. Jeśli $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem, napis

$$\vec{Y} = \vec{X} + \mathbf{p} \tag{1}$$

będzie oznaczać *punkt* o wektorze wodzącym $\vec{Y}$.



Funkcje wielu zmiennych

Rozważąmy przestrzeń $\mathbb{R}^N$ z zadaną metryką $\varrho(\cdot, \cdot)$. Nas będzie interesować wyłącznie metryka euklidesowa, ale w rozmaitych zastosowaniach bardziej użyteczne mogą okazać się inne metryki.

Funkcją rzeczywistą N zmiennych rzeczywistych nazywam **relację jednoznaczną** $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$: Pewnemu punktowi przestrzeni $\mathbb{R}^N$ — lub pewnemu zestawowi zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_N$, będącymi współrzędnymi tego punktu — przyporządkowuję w sposób **jednoznaczny** pewną liczbę rzeczywistą, będącą wartością funkcji w tym punkcie.

Jednoznaczność ma zasadnicze znaczenie: temu samemu punktowi może być przypisana jedna i tylko jedna wartość funkcji, ale, w ogólności, wartość ta może być przypisana wielu punktom. Oczywiście *inne* funkcje mogą w tym punkcie przybierać inne wartości.

Przykład 1

Przykłady funkcji rzeczywistych dwu, trzech, czterech zmiennych rzeczywistych:

$$f_1(x,y) = x^2 + xy + y^2 \tag{2a}$$

$$f_2(x,y) = x \cdot \sin(y) - y \cdot \cos(x) \tag{2b}$$

$$f_3(x,y,z) = \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2c}$$

$$f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\ln\left(4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_1^2\right)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \tag{2d}$$

Zauważmy, że $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Granica funkcji wielu zmiennych

W przestrzeni metrycznej $\left(\mathbb{R}^N, \varrho\right)$ możemy zdefiniować granicę funkcji w punkcie, uogólniając znaną z teorii funkcji jednej zmiennej definicję Cauchy'ego:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = g \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,\mathbf{x} : (\varrho(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - g| < \varepsilon) \tag{3}$$

Można też sformułować równoważną definicję Heinego, wykorzystującą zbieżność ciągów:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = g \Leftrightarrow \forall\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} : \left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = g\right) \tag{4}$$

Można także definiować granice niewłaściwe.

Uwaga!

Granica funkcji wielu zmiennych może nie istnieć, podobnie jak nie musi istnieć granica funkcji jednej zmiennej. W przypadku wielowymiarowym pojawia się jednak nowy problem, niewystęujący w przypadku jednowymiarowym: Granica funkcji wielu zmiennych nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zmierzamy, czy też od sposobu, w jaki zmierzamy do granicy.

Przykład 2

Przyjrzyjmy się funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{5}$$

i rozpatrzmy granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{6}$$

1. Niech $y = x$. Wówczas granica (6) przybiera postać

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{7a}$$

2. Niech $y = \sqrt{|x|}$. W tym wypadku otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x^2 + |x|} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sgn}(x))\sqrt{|x|}}{x\,\mathrm{sgn}(x) + 1} = 0 \tag{7b}$$

3. Niech teraz $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. W tym wypadku otrzymujemy

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2 \sin\varphi\, \cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \tag{7c}$$

Jak widzimy, granica (6) przybiera różne wartości w zależności od sposobu podążania do punktu $(0,0)$. Wnioskujemy stąd, że granica (6) nie istnieje.

Granice iterowane

Jeżeli granica (3) istnieje, istnieją też granice iterowane, czyli granice, gdy poszczególne zmienne "po kolei" zmierzają do punktu granicznego.

Dla przykładu funkcji dwóch zmiennych

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = g \;\wedge\; \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = g \tag{8}$$

Istnienie i równość granic iterowanych jest warunkiem koniecznym istnienia granicy, ale *nie* jest warunkiem wystarczającym.

Przykład 3

Po raz kolejny rozpatrzmy funkcję (5). Granice iterowane spełniają

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \tag{9a}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \tag{9b}$$

a jednak granica (6) nie istnieje.

Granic iterowanych często używa się do wykazania, że jakaś granica funkcji wielu zmiennych *nie* istnieje: Gdyby granica istniała, granice iterowane musiałyby być równe. Jeśli granice iterowane różnią się od siebie, granica nie istnieje. Rozważmy

Przykład 4

Niech

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \tag{10}$$

Czy granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \tag{11}$$

istnieje?

Rozważam granice iterowane:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1 \tag{12a}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1 \tag{12b}$$

Ponieważ granice (12a), (12b) różnią się od siebie, wnioskujemy, że granica (11) nie istnieje.

Zdefiniowawszy pojęcie granicy w przestrzeni $\mathbb{R}^N$, możemy teraz zdefiniować ciągłość funkcji, pojęcie ciągu Cauchy'ego, a także zastanowić się, w jaki sposób można uogólnić pojęcie pochodnej. Dla funkcji jednej zmiennej x pochodna określa prędkość zmian, gdy wartość zmiennej niezależnej zmienia się o infinitezymalnie małą wielkość. W przypadku funkcji wielu zmiennych każda z nich może się zmieniać niezależnie od pozostałych.

Pochodna kierunkowa

Niech $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ pewnym punktem, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ — pewnym wektorem unormowanym do jedności, $\|\mathbf{p}\| = 1$. Zdefiniujmy

$$g(\alpha) = f(\mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{p}) \tag{13}$$

Zauważmy, że funkcja (13) *jest funkcją jednej zmiennej, α*. Możemy zatem rozważać jej pochodną

$$\left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\left(\frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{p})\right)\right|_{\alpha=0} \tag{14}$$

Jeżeli pochodna (14) istnieje, nazywam ją **pochodną kierunkową funkcji f** w punkcie $\mathbf{x}_0$ w kierunku wektora $\mathbf{p}$.

Przykład 5

$$f(x, y) = (x + y)^2 \cdot \sin(x - y) \tag{15}$$

Niech $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{p} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Wówczas funkcja (13) przybiera postać

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\pi + \sqrt{2}\,\alpha\right)^2 \cdot \sin 0 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$\frac{d0}{d\alpha} = 0$ i widzimy, że pochodna kierunkowa funkcji (15) w podanym punkcie i w kierunku podanego wektora wynosi 0.

Przykład 6

Niech $f(x,y)$ będzie określona wzorem (15), $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ jak poprzednio, ale $\mathbf{p} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Wówczas funkcja (13) przybiera postać

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \pi^2 \cdot \sin\left(\sqrt{2}\,\alpha\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Zatem pochodna kierunkowa funkcji (15) w tym samym punkcie, co poprzednio, ale w kierunku drugiego podanego wektora wynosi

$$\begin{aligned} \left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} &= \left.\frac{d}{d\alpha}\pi^2 \cdot \sin\left(\sqrt{2}\,\alpha\right)\right|_{\alpha=0} \\ &= \left.\pi^2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\alpha\right)\right|_{\alpha=0} = \sqrt{2}\,\pi^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Pochodne cząstkowe

Pochodne kierunkowe w kierunku kolejnych wektorów osi kartezjańskiego układu współrzędnych nazywam pochodnymi cząstkowymi i oznaczam $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots$, gdzie $x_1, x_2, \dots$ są kolejnymi zmiennymi.

Tak więc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x} + \alpha \cdot [1, 0, 0, \dots]) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} f(x_1 + \alpha, x_2, x_3, \dots) \Big|_{\alpha=0} \tag{19a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x} + \alpha \cdot [0, 1, 0, \dots]) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} f(x_1, x_2 + \alpha, x_3, \dots) \Big|_{\alpha=0} \tag{19b}$$

$$\dots$$

Operacyjnie pochodne cząstkowe oblicza się jak “zwykłe” pochodne, traktując pozostałe zmienne jak parametry o ustalonych wartościach.

Przykład 7

$$f(x,y) = xy\,,\ \frac{\partial f}{\partial x} = y\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \tag{20a}$$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{20b}$$

$$f(x,y) = \sin(2x+3y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x+3y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3\cos(2x+3y) \tag{20c}$$

Przykład 8

Pochodne cząstkowe funkcji (15) wynoszą

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y)\cdot\sin(x-y) + (x+y)^2\cos(x-y) \tag{21a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y)\cdot\sin(x-y) - (x+y)^2\cos(x-y) \tag{21b}$$

Pochodna zupełna

Dla uproszczenia notacji ograniczę się tu do funkcji dwu zmiennych, ale wynik można łatwo uogólnić na przypadki więcejwymiarowe.

Niech $f(u,v)$ będzie różniczkowalną funkcją dwu zmiennych. Załóżmy teraz, że $u = u(t), v = v(t)$ same są funkcjami jakiejś innej zmiennej, t. Wówczas

$$z(t) = f(u(t), v(t)) \tag{22}$$

Jak obliczyć pochodną $z(t)$? Jeśli znamy *jawną* postać funkcji f, możemy podstawić i różniczkować jak w przypadku jednowymiarowym. Okazuje się jednak, że — uogólniając pojęcie pochodnej funkcji złożonej — można pokazać, że

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \tag{23}$$

lub, uogólniając na N zmiennych,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \cdot \frac{dx_N}{dt} \,. \tag{24}$$

Wzór (24) nazywa się wzorem na pochodną zupełną lub całkowitą.

Przykład 9

Rozpatrzmy funkcję (15) zakładając, że x, y zależą od zmiennej t w ten sposób: $x = at, y = bt$. Niech $z(t) = f(at, bt)$. Korzystając ze wzoru na pochodną zupełną i obliczonych wcześniej pochodnych cząstkowych, mamy

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \Big(2(at+bt) \cdot \sin(at-bt) + (at+bt)^2 \cos(at-bt)\Big) \cdot a \\
&+ \Big(2(at+bt) \cdot \sin(at-bt) - (at+bt)^2 \cos(at-bt)\Big) \cdot b \\
&= 2(a+b)^2 t \sin((a-b)t) + (a-b)(a+b)^2 t^2 \cos((a-b)t)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Gradient funkcji

Wektor złożony z pochodnych cząstkowych (ze *wszystkich* pochodnych cząstkowych) pewnej funkcji w danym punkcie nazywam gradientem funkcji i oznaczam

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots\right] = \mathsf{grad}\, f = \nabla\, f \tag{26}$$

gdzie symbol ∇, “nabla”, oznacza formalny operator różniczkowania po kolejnych współrzędnych:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots\right] \tag{27}$$

Geometryczna interpretacja gradientu

Niech $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją (co najmniej) jednokrotnie różniczkowalną w sposób ciągły. Przypuśćmy, że znajdujemy się w punkcie $\mathbf{x}$ i przesuwamy się o niewielką wartość α, $|\alpha| \ll 1$, w kierunku pewnego wektora $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}\,. \tag{28}$$

Pytanie, jak bardzo na skutek tego przesunięcia zmieni się wartość funkcji f?

Zauważmy, że funkcja

$$g(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}) \tag{29}$$

podobnie jak wcześniej, jest, przy ustalonych wartościach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{p}$, *funkcją jednej zmiennej*, α. Rozwijając ją w szereg Taylora do pierwszego rzędu dostajemy

$$g(\alpha) \simeq g(0) + \alpha \left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{30a}$$

$$\Delta f \equiv \Delta g = g(\alpha) - g(0) \simeq \alpha \left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{30b}$$

gdzie "Δf" oznacza zmianę funkcji f.

Możemy napisać

$$g(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}) = f(x_1 + \alpha p_1, x_2 + \alpha p_2, \dots, x_N + \alpha p_N) \tag{31}$$

zatem, zgodnie ze wzorem na pochodną zupełną (24),

$$\begin{aligned} \left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} &= \sum_{i=1}^{N} \left.\left(\frac{\partial f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{p})}{\partial(x_i + \alpha p_i)} \cdot \frac{d(x_i + \alpha p_i)}{d\alpha} \right)\right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} p_i = (\nabla f) \circ \mathbf{p} \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie p_i są składowymi wektora $\mathbf{p}$. Innymi słowy,

$$\Delta f \simeq \alpha \cdot (\nabla f) \circ \mathbf{p} \tag{33}$$

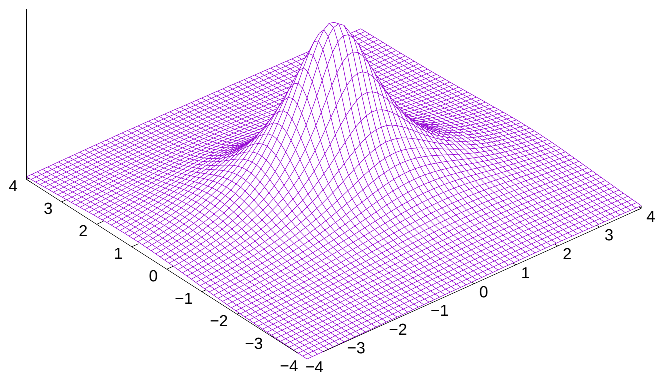
Zatem przy ustalonych wartościach α, $\|\mathbf{p}\|$, zmiana funkcji (33) jest największa, gdy $\measuredangle(\nabla f, \mathbf{p}) = 0$. **Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji.**

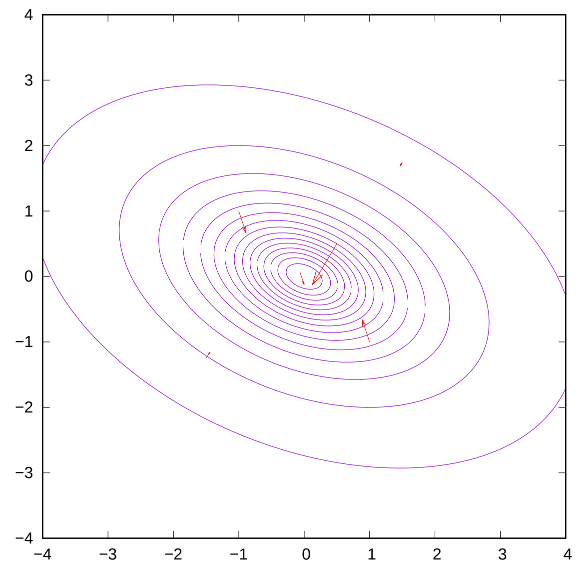
Poziomnice

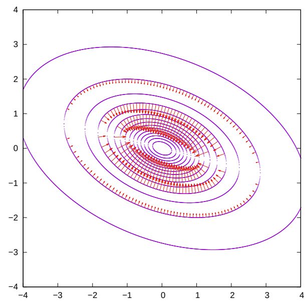
Poziomnice to krzywe, wzdłuż których wartość funkcji wielu zmiennych jest stała.

Z wyrażenia (33) wynika, że jeżeli $(\nabla f) \circ \mathbf{p} = 0$, czyli gdy kierunek gradientu i kierunek lokalnego przesunięcia są prostopadłe, $\triangle f = 0$: Bardzo małe ($|\alpha| \ll 1$) przesunięcie w kierunku prostopadłym do gradientu nie prowadzi do zmiany wartości funkcji. Wynika stąd, że gradient jest (lokalnie) prostopadły do poziomnic funkcji.

Przykład 10







Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Pochodne cząstkowe funkcji N zmiennych same są funkcjami N zmiennych. Można więc definiować *ich* pochodne cząstkowe, czyli pochodne pochodnych. Zmienne mogą się mieszać! Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{34a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{34b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{34c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{34d}$$

W sposób oczywisty można to uogólnić na funkcje trzech i więcej zmiennych, a także na pochodne wyższych rzędów.

Przykład 11

Niech

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \tag{35a}$$

Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2} \tag{35b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \tag{35c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y}{(x+y)^3} \tag{35d}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \tag{35e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \tag{35f}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3} \tag{35g}$$

Funkcje klasy C_2

Jeżeli funkcja dwu zmiennych jest odpowiednio gładka, to
1° jej drugie pochodne cząstkowe są ciągłe
2° pochodne mieszane są sobie równe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \tag{36}$$

i podobnie dla większej liczby zmiennych:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\,,\ i,j = 1,\dots,N \tag{37}$$

O funkcjach, których drugie pochodne są ciągłe i które spełniają warunek (37) mówimy, że są klasy C_2.

W ogólności funkcja N zmiennych ma N^2 drugich pochodnych cząstkowych. Jeżeli funkcja jest klasy co najmniej C_2, liczba *niezależnych* drugich pochodnych cząstkowych redukuje się do $N(N-1)/2$.

Różniczka zupełna

Niech $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy (co najmniej) C_2. Wyrażenie

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \cdot dx_N \tag{38}$$

nazywam różniczką zupełną funkcji f w pewnym punkcie, mianowicie w tym, w którym obliczane są wszystkie pochodne cząstkowe. Różniczka zupełna opisuje zmianę funkcji, gdy poszczególne zmnienne *niezależnie* zmieniają się o infinitezymalnie małe wielkości, odpowiednio, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_N$.

Zauważmy, że ponieważ df jest różniczką funkcji klasy C_2, pochodne mieszane z założenia są sobie równe.

Różniczka zupełna określa geometrię hiperpłaszczyzny lokalnie stycznej do N wymiarowego “wykresu” funkcji f.