

Fizyka dla firm — Matematyka

26. Całka oznaczona

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

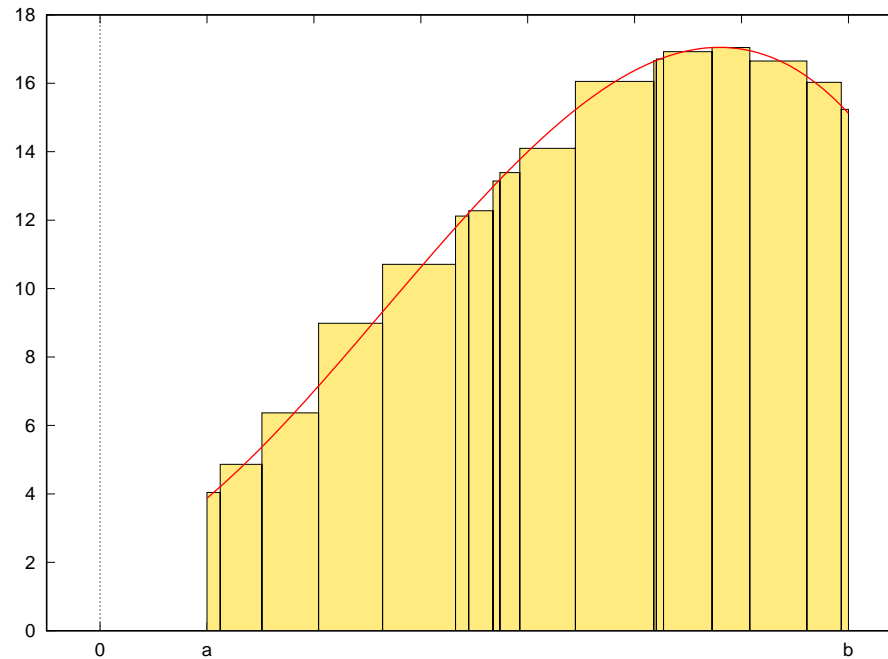
23 stycznia 2023

Sumy Riemanna

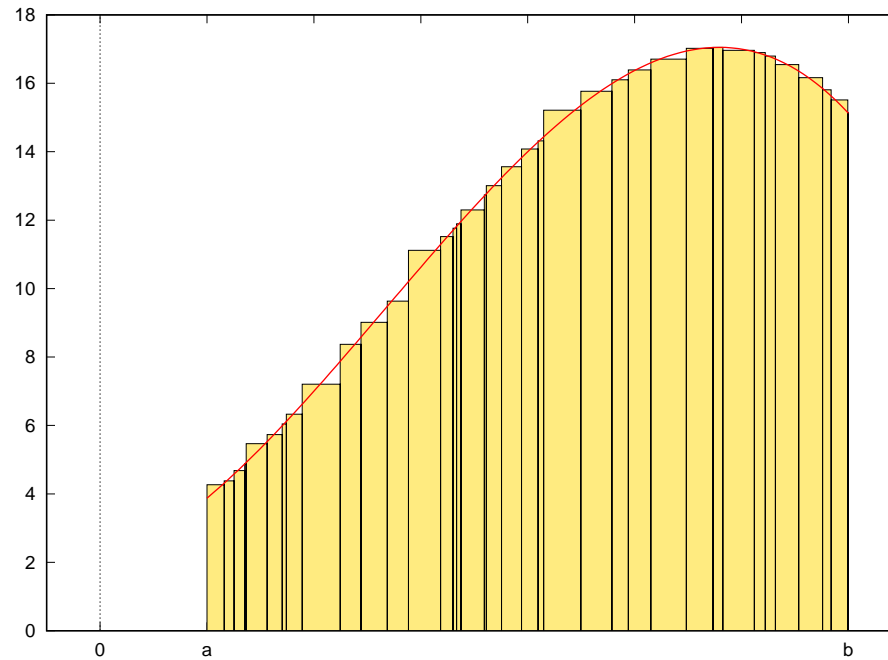
Niech będzie dana pewna funkcja $f(x)$ i pewien przedział $[a, b]$. Tworzymy ciąg $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv b$. W każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, wybieramy pewien punkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, a następnie tworzymy sumę

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

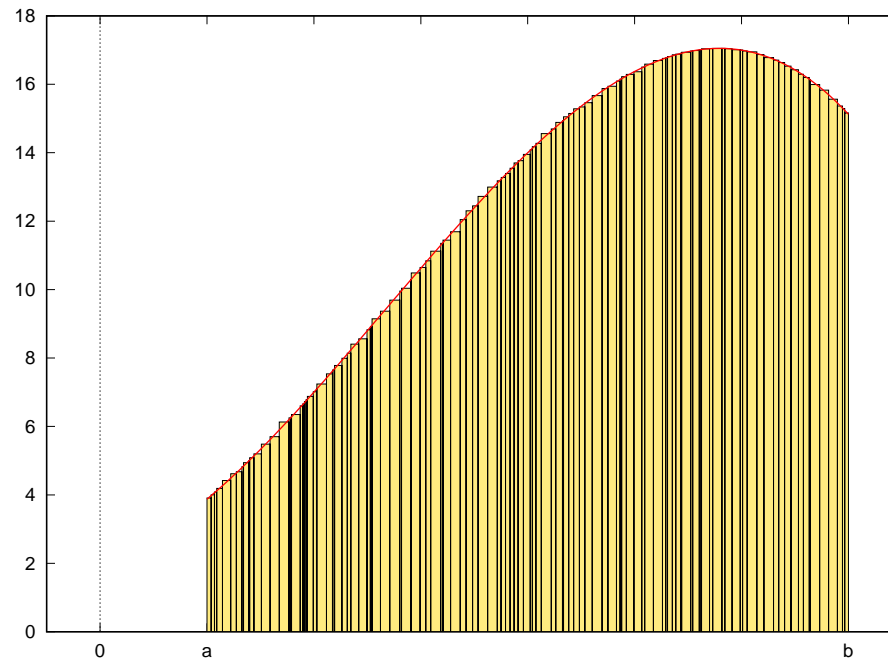
Sumę (1) nazywam **sumą Riemanna**. Każdy element sumy Riemanna jest równy polu prostokąta o podstawie $x_i - x_{i-1}$ i wysokości $f(\xi_i)$.



W sumie Riemanna poszczególne przedziały nie muszą być równe, a punkty pośrednie ξ_i nie są wybierane w jakiś szczególny sposób. Czerwona linia jest wykresem funkcji $f(x)$.



Zagęszczamy podział. Liczba przedziałów rośnie, a ich średnia długość się zmniejsza.



Jeszcze bardziej zagęszczamy podział.

Całka Riemanna

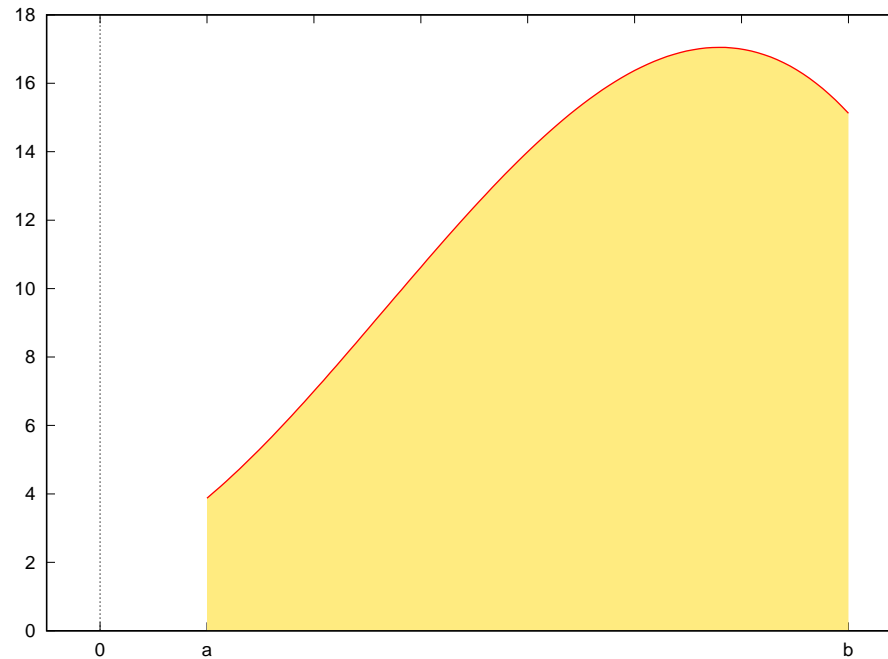
Jeżeli dla każdego podziału o tej własności, że długość najdłuższego podprzedziału dąży do zera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}| = 0 \quad (2)$$

granica ciągu sum Riemanna (1) istnieje i nie zależy od sposobu wyboru punktów ξ_i , granicę tę nazywam **całką oznaczoną** funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ i oznaczam

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

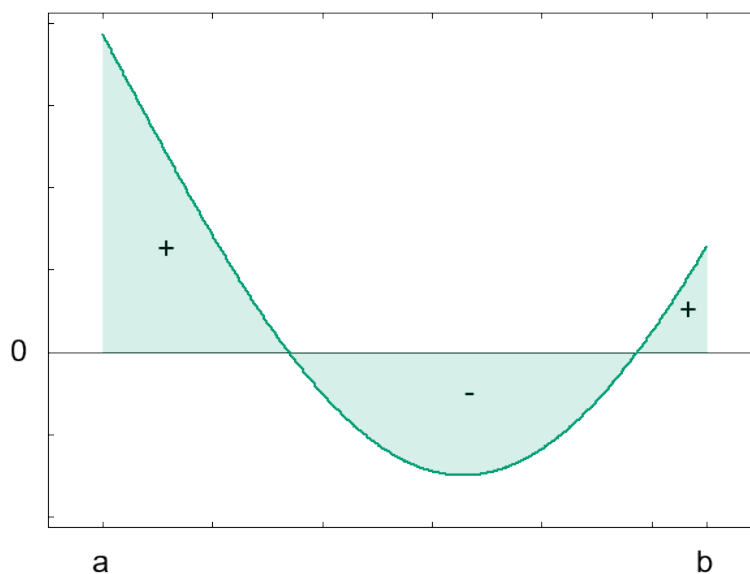
Symbol całki \int nawiązuje do wydłużonego symbolu sumowania i ma oddawać intuicję, że **całka oznaczona to suma nieskończenie wielu nieskończenie małych przyczynków** 😊.



Jeżeli całka (3) istnieje, ciąg sum Riemanna jest zbieżny do pola pod wykresem funkcji w granicach całkowania. Jest to **geometryczna interpretacja całki oznaczonej**.

Ujemne pole

Jeżeli funkcja może przybierać wartości ujemne, pole leżące *nad* wykresem funkcji, ale poniżej osi x , jest traktowane jako **ujemne**: W obszarze, gdzie wartości funkcji są ujemne, prostokąty wchodzące w skład sumy Riemanna mają ujemne wysokości.



Całkowalność

Jeżeli całka oznaczona

$$\int_a^b f(x) dx$$

istnieje, mówimy, że funkcja $f(x)$ jest **całkowalna na przedziale $[a, b]$** .

Można udowodnić, że **każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$** (łącznie z krańcami przedziału) jest na tym przedziale całkowalna.

Niecałkowalne mogą być funkcje nieciągłe wewnątrz **lub** na krańcach przedziału. Funkcje całkowalne na przedziałach skończonych mogą być niecałkowalne na przedziałach nieskończonych — patrz niżej. Całkowalność jest warunkiem słabszym, niż ciągłość: niektóre funkcje nieciągłe są całkowalne.

“Nie zależy od sposobu wyboru punktów pośrednich”

Rozpatrzmy funkcję Dirichleta

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ jest liczbą wymierną} \\ 0 & x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases} \quad (4)$$

Można łatwo udowodnić, że funkcja ta nie jest ciągła w żadnym punkcie. Spróbujmy obliczyć całkę oznaczoną z tej funkcji

$$\int_0^1 f_D(x) dx \quad (5)$$

Ponieważ w definicji całki Riemanna mowa jest o *każdym możliwym* podziale przedziału całkowania, podzielmy odcinek $[0, 1]$ na podprzedziały od długości 2^{-s} każdy: dwa podprzedziały o długości $1/2$, cztery podprzedziały o długości $1/4$, ..., 1024 podprzedziały o długości $1/1024$ itd. Granice tych podprzedziałów są liczbami wymiernymi. Jeśli więc weźmiemy

jako punkty pośrednie lewe krańce każdego podprzedziału, $\xi_i = x_{i-1}$, $f_D(\xi_i) = 1$ i ciąg sum Riemanna jest ciągiem stałym o wartości $s_n = 1$.

Z drugiej strony, jeśli przy takich samych podprzedziałach każdy z nich podzielimy w “złotej proporcji”, $\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(x_i - x_{i-1})$, punkty pośrednie będą niewymierne, $f_D(\xi_i) = 0$ i ciąg sum Riemanna jest ciągiem stałym o wartości $s_n = 0$.

Jak widzimy, ciąg sum Riemanna **nie** dąży do określonej granicy **niezależnie od sposobu wyboru punktów pośrednich**, a zatem całka Riemanna z funkcji Dirichleta (4) **nie istnieje**.

Całka Lebesgue'a

Zdefiniowana powyżej całka Riemanna jest dość prosta i nie obejmuje wielu interesujących z matematycznego punktu widzenia przypadków. Istnieje znacznie bardziej ogólna — i trudniejsza — definicja całki oznaczonej, zwana całką Lebesgue'a.

Z drugiej strony całka Riemanna w zupełności wystarcza do bardzo wielu zastosowań “praktycznych”, w fizyce stosowanej i w innych naukach, w tym w naukach inżynierskich.

Można udowodnić, że jeśli istnieje całka Riemanna, to istnieje także całka Lebesgue'a i ich wartości są równe. W drugą stronę to twierdzenie nie zachodzi. Całka w sensie Lebesgue'a z funkcji Dirichleta (4) istnieje i jest równa 0.

Własności całki oznaczonej

Całka jest operacją liniową:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (6)$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, jeżeli tylko całki $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ istnieją.

Całka jest addytywna:

Jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ istnieje, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (7)$$

dla dowolnego $a < c < b$.

Odwrócenie granic całkowania:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (8)$$

Odwrócenie granic całkowania sprawia, że “szerokości” prostokątów w sumie Riemanna (1) stają się ujemne.

Całka z funkcji ograniczonej:

Jeżeli $f(x)$ jest całkowna na $[a, b]$ oraz $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$, to

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b - a| \quad (9)$$

Całkowe twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie: Jeżeli w przedziale $[a, b]$ funkcja $f(x)$ jest ciągła, a funkcja $g(x)$ jest całkowalna i stale nieujemna lub stale niedodatnia, to istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (10)$$

Obserwacja: Powyższe twierdzenie odnosi się także do przypadku $g(x) \equiv 1$. Wówczas jeżeli $f(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, to istnieje $\xi \in (a, b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a) \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \quad (11)$$

Całka jako funkcja górnej granicy całkowania

Niech funkcja $f(t)$ będzie całkowna na przedziale $[a, b]$. Wówczas $\forall x \in [a, b]$ całka

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (12)$$

Istnieje. $F(x)$ jest funkcją górnej granicy całkowania w (12). Można pokazać, że

- funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$,
- w każdym punkcie, w którym $f(x)$ jest ciągła

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad (13)$$

Wniosek: Każda funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ ma w tym przedziale funkcję pierwotną, daną wzorem (12).

Przykład 1

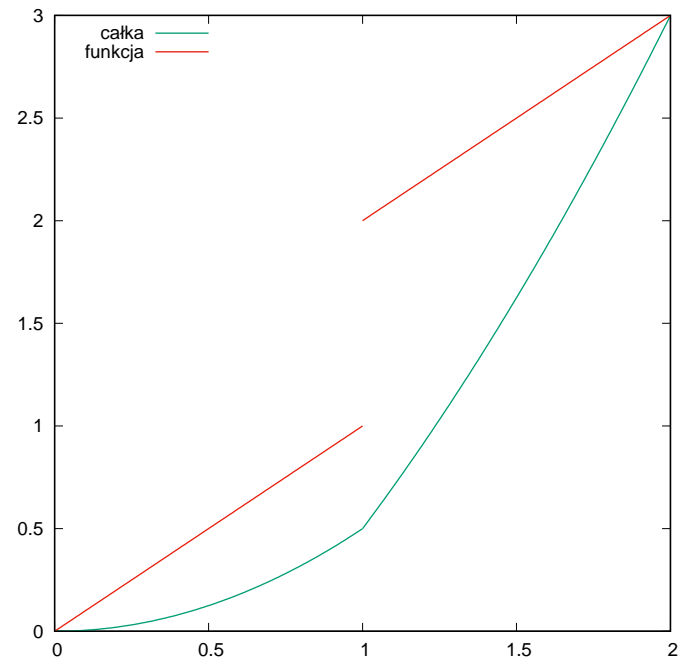
Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases} \quad (14)$$

Niech $x \in [0, 2]$. W tym przedziale dla funkcji (14) otrzymujemy

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x - 1 & x > 1 \end{cases} \quad (15)$$

(ostatnią równość uzasadnimy za chwilę).



W punkcie skoku całka jako funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna.

Związek pomiędzy całką oznaczoną a nieoznaczoną

Niech $f(x)$ będzie **ciągła** na przedziale $[a, b]$ i niech $F(x)$ będzie jej **funkcją pierwotną**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (16a)$$

Wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (16b)$$

co często zapisujemy

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad (16c)$$

Przykład 2

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{7}{3} \quad (17a)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1 \quad (17b)$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} \quad (17c)$$

Przykład 3

Wzoru (16b) nie wolno używać bezmyślnie! Stosuje się on tylko do funkcji całkownych! Rozpatrzmy całkę

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{-2} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \quad (18a)$$

Otrzymaliśmy absurdalny wynik: całka z funkcji stale nieujemnej jest ujemna?! Rzecz w tym, że wzoru (16b) nie można w tym wypadku stosować, gdyż całka (18a) nie istnieje.

Aby się o tym przekonać, napiszmy

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left. -\frac{1}{x} \right|_{-2}^{-\varepsilon} + \left. \left(-\frac{1}{x} \right) \right|_{\varepsilon}^2 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{-\varepsilon} - \left(-\frac{1}{-2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) = +\infty\end{aligned}\tag{18b}$$

Całka (18a) jest rozbieżna, a funkcja podcałkowa nie jest ciągła na przedziale całkowania. Wzoru (16b) nie można wobec tego stosować.

Zmiana zmiennych w całce oznaczonej

Znaną techniką obliczania całek nieoznaczonych jest zmiana zmiennych (podstawienie). Podobnie postępujemy w przypadku całek oznaczonych, z tym, że należy także pamiętać o przekształceniu granic całkowania.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze wartości funkcji $x = \varphi(t)$, ciągłej i mającej ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha, \beta]$, i jeżeli $a = \varphi(\alpha)$ oraz $b = \varphi(\beta)$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (19)$$

Przykład 4

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx &= \left. \begin{array}{l} 1-x^2 = u \\ -2x dx = du \\ x dx = -\frac{du}{2} \\ x=0 \rightarrow u=1 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{array} \right| = \int_1^0 \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2}\right) \\ &= -\int_0^1 \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{1}{3} \quad (20) \end{aligned}$$

Całkowanie po przedziałach symetrycznych

Jeśli funkcja jest parzysta

$$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx \quad (21a)$$

Jeśli funkcja jest nieparzysta

$$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-A}^A f(x) dx = 0 \quad (21b)$$

Dla funkcji, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste, żadne relacje tego typu w ogólności nie zachodzą.

Przykład 5

Obliczmy pole okręgu o promieniu r . Okrąg opisany jest równaniem

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (22a)$$

Z symetrii widać, że pole części okręgu leżącej nad osią OX jest równe polu części okręgu leżącej pod osią OX . Zajmijmy się górną połówką, $y \geq 0$, $-r \leq x \leq r$. Pole górnej połówki jest polem pod wykresem funkcji opisującej górną połówkę okręgu, czyli całką z tej funkcji. Dla całego pola mamy

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (22b)$$

$$S = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= \left. \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = r \rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt$$

$$= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 \cdot \frac{r^2}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 - \sin 0 \cos 0 \right) = \pi r^2 \quad (22c)$$

Całkowanie po przedziale nieskończonym

$$\int_A^{\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_A^B f(x) dx \quad (23)$$

gdzie A jest jakąś skończoną liczbą.

Aby całka (23) istniała, muszą być spełnione *dwa* warunki:

- całki po przedziałach skończonych $\int_A^B f(x) dx$ muszą istnieć,
- musi istnieć granica $B \rightarrow \infty$.

Całkowalność na przedziałach $[A, B]$ jest “zwykłym” problemem. Nowe zagadnienia mogą pojawić się w związku z przejściem granicznym.

Przykład 6

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{B} \right) = 1 \quad (24)$$

Przykład 7

Całka

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx \quad (25)$$

nie istnieje, gdyż granica $\lim_{B \rightarrow \infty} \sin B$ nie istnieje.

Przykład 8

Rozpatrzmy całkę

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = u \\ 2x dx = du \\ x=0 \rightarrow u=1 \\ x=B \rightarrow u=1+B^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^{1+B^2} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow \infty} \ln u \Big|_1^{1+B^2} = \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow \infty} \ln(1+B^2) \\ &\sim \lim_{B \rightarrow \infty} \ln B = +\infty \end{aligned} \tag{26}$$

Całka (26) nie istnieje. Aby całka po przedziale nieskończonym mogła istnieć, ogon funkcji podcałkowej musi dostatecznie szybko zniknąć w nieskończoności, co najmniej jak $1/|x|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Podobnie definiuje się całkę po przedziale $\int_{-\infty}^B$. Zagadnienia związane z tą całką są bardzo podobne.

Przykład 9

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^B = - \left(\lim_{B \rightarrow \infty} e^{-B} \right) - (-e^0) = 1 \quad (27)$$

Przykład 10

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} e^{-0} (\sin 0 + \cos 0) \right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

Całki $\int_{-\infty}^{\infty}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-A}^B f(x) dx \quad (29)$$

Aby całka (29) istniała, muszą być spełnione **trzy** warunki:

- całki po przedziałach skończonych muszą istnieć,
- funkcja podcałkowa w obu niskończonościach musi zniknąć dostatecznie szybko,
- podwójna granica musi istnieć **niezależnie od tego**, w jaki sposób A, B zmiierają do nieskończoności.

Przykład 11

Rozpatrzmy całkę podobną do (26)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \quad (30a)$$

Jeżeli będziemy całkować po przedziałach symetrycznych

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \quad (30b)$$

gdyż funkcja podcałkowa jest nieparzysta, a przedział całkowania jest symetryczny względem $x = 0$. Taką interpretację całki $\int_{-\infty}^{\infty}$ — całkowanie po przedziałach symetrycznych względem $x = 0$ (lub względem innego

wybranego punktu) — nazywa się **wartością główną całki**. Zapisujemy (P jak *principal value*)

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \quad (30c)$$

Nie jest to jednak jedyny możliwy wybór granic całkowania, które w granicy odtwarzają całą oś rzeczywistą. Weźmy na przykład

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{2A} \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\int_{-A}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{2A} \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{2A} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln u \Big|_{1+A^2}^{1+4A^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \frac{1+4A^2}{1+A^2} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2 \quad (30d)
\end{aligned}$$

Z drugiej strony gdybyśmy wzięli

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-2A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = -\ln 2 \quad (30e)$$

Biorąc inne zależności pomiędzy A , B , moglibyśmy dostać jeszcze inne wyniki. Wobec tego całka (30a) **nie istnieje**.