Fizyka dla firm — Matematyka

25. Kilka dalszych przykładów

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

19 stycznia 2023

Przykład 1

Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

Czy wyrażenie $\sqrt{\mathbf{A}}$ jest dobrze określone? Jeśli tak, oblicz je.

Rozwiązanie: Macierz (1a) jest hermitowska, można zatem próbować definiować $\sqrt{\mathbf{A}}$ w sensie rozwinięcia spektralnego, pod warunkiem, że wartości własne macierzy (1a) są nieujemne.

Aby znaleźć wartości własne, obliczamy

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - i\cdot(-i) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \tag{1b}$$

skąd $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, a zatem wyrażenie $\sqrt{\mathbf{A}}$ jest dobrze określone.

Oznaczmy wektor własny $[a, b]$. Musi on spełniać

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1c}$$

Podstawiając $\lambda = \lambda_1 = 1$ dostajemy układ równań

$$a + ib = 0 \tag{1d}$$

$$-ia + b = 0 \tag{1e}$$

skąd $a = -ib$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1f}$$

Po podstawieniu $\lambda = \lambda_2$

$$\begin{aligned} -a + ib &= 0 \qquad (1g) \\ -ia - b &= 0 \qquad (1h) \end{aligned}$$

skąd $a = ib$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1i)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{A}} &= \sqrt{\lambda_1}\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\dagger + \sqrt{\lambda_2}\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & i(\sqrt{3}-1) \\ -i(\sqrt{3}-1) & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix} \qquad (1j) \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{A}}\cdot\sqrt{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & i(\sqrt{3}-1) \\ -i(\sqrt{3}-1) & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & i(\sqrt{3}-1) \\ -i(\sqrt{3}-1) & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2 & 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \\ -2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) & (\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(1k)}
\end{aligned}
$$

Przykład 2

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{24}{5x^4 - 12x^2 + 24} \tag{2a}$$

Rozwiązanie: Wyróżnik trójmianu kwadratowego w mianowniku (2a)

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 24 = -336 < 0 \tag{2b}$$

a więc dziedziną funkcji (2a) jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja jest parzysta. Wartości funkcji są stale większe od zera.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{24}{5x^4 - 12x^2 + 24} = 0 \tag{2c}$$

z czego wynika także, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji w $\pm\infty$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 24 \cdot \left(-\frac{1}{(5x^4 - 12x^2 + 24)^2} \right) \cdot (5 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 2x) \\
&= 96 \, \frac{x(-5x^2 + 6)}{(5x^4 - 12x^2 + 24)^2}
\end{aligned}
\tag{2d}
$$

a więc znak pochodnej jest zgodny ze znakiem licznika ułamka w (2d). Miejscami zerowymi pochodnej są liczby $x = 0, \pm\sqrt{6/5}$.

x	x	$-5x^2+6$	$f'(x)$	funkcja
$x < -\sqrt{6/5}$	$-$	$-$	$+$	rosnąca
$-\sqrt{6/5}$	$-$	0	0	maksimum $= 10/7$
$-\sqrt{6/5} < x < 0$	$-$	$+$	$-$	malejąca
0	0	$+$	0	minimum $= 1$
$0 < x < \sqrt{6/5}$	$+$	$+$	$+$	rosnąca
$\sqrt{6/5}$	$+$	0	0	maksimum $= 10/7$
$x > \sqrt{6/5}$	$+$	$-$	$-$	malejąca

(2e)

Przykład 3

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \tag{3a}$$

Rozwiązanie: Musimy znaleźć miejsca zerowe mianownika. Łatwo sprawdzić, że są nimi liczby $x = -1$, $x = 2$. Zatem dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$. Funkcja nie jest okresowa ani nie ma określonej parzystości.

Ponieważ stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, możemy podzielić licznik przez mianownik (na przykład przy pomocy "pisemnego" dzielenia wielomianów), otrzymując

$$g(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)(x - 2)} \tag{3b}$$

Granice:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}\right) = \pm\infty \tag{3c}$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\left(x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}\right) = 0+\frac{-3+2}{0^-\cdot(-3)} = -\infty \tag{3d}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left(x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}\right) = 0+\frac{-3+2}{0^+\cdot(-3)} = \infty \tag{3e}$$

$$\lim_{x\to(2)^-}\left(x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}\right) = 3+\frac{6+2}{3\cdot 0^-} = -\infty \tag{3f}$$

$$\lim_{x\to(2)^+}\left(x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}\right) = 3+\frac{6+2}{3\cdot 0^+} = \infty \tag{3g}$$

Asymptoty: Z postaci (3b) widać, że prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną funkcji (3a) w $\pm\infty$. Formalnie wynika to z tego, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-(x+1))=0\,. \tag{3h}$$

Proste $x=-1$, $x=2$ są asymptotami pionowymi funkcji.

Pochodna:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3x^2(x^2-x-2)-x^3(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2} \end{aligned} \tag{3i}$$

$g'(x)=0$ dla $x=0$, $x=1-\sqrt{7}<-1$, $x=1+\sqrt{7}>2$. Znak pochodnej zależy od znaku trójmianu kwadratowego w liczniku (pozostałe człony są nieujemne).

x	$x^2 - x - 2$	$g'(x)$	$g(x)$
$x < 1 - \sqrt{7}$	$+$	$+$	rosnąca
$1 - \sqrt{7}$	0	0	maksimum $= \frac{2}{9}(10 - 7\sqrt{7})$
$1 - \sqrt{7} < x < -1$	$-$	$-$	malejąca
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	malejąca
0	$-$	0	punt przegięcia $= 0$
$0 < x < 2$	$-$	$-$	malejąca
$2 < x < 1 + \sqrt{7}$	$-$	$-$	malejąca
$1 + \sqrt{7}$	0	0	minimum $= \frac{2}{9}(10 + 7\sqrt{7})$
$x > 1 + \sqrt{7}$	$+$	$+$	rosnąca

(3j)

Zwracam uwagę, że w tabeli (3j) **koniecznie** trzeba uwzględnić punkty osobliwe funkcji.

Uwaga: Punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia funkcji (3a), gdyż pochodna w tym punkcie znika, ale funkcja nie ma tam ekstremum, co z kolei wynika z tego, że w otoczeniu tego punktu pochodna nie zmienia znaku.

Dla $|x| \ll 1$, $g(x) \simeq -\frac{1}{2}x^3$, $g'(x) \simeq -\frac{3}{2}x^2$.

Przykład 4

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$h(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \tag{4a}$$

Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja jest parzysta i okresowa, z okresem 2π. Z uwagi na okresowość, granice w $\pm\infty$ nie istnieją. Także z uwagi na okresowość wystarczy zbadać funkcję w przedziale $[0, 2\pi]$.

Pochodna funkcji wynosi

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{-\sin x(1+\cos^2 x) - \cos x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2} \\
&= -\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\left(1+\cos^2 x - 2\cos^2 x\right) \\
&= -\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\left(1-\cos^2 x\right) = -\frac{\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}
\end{aligned}
\tag{4b}
$$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. Znak pochodnej jest przeciwny do znaku $\sin x$.

x	$h'(x)$	$h(x)$
0	0	maksimum $= 1/2$
$0 < x < \pi$	$-$	malejąca
π	0	minimum $= -1/2$
$\pi < x < 2\pi$	$+$	rosnąca
2π	0	maksimum $= 1/2$

(4c)

Możemy także obliczyć drugą pochodną funkcji (4a).

$$
\begin{aligned}
h''(x) &= -\frac{3\sin^2 x\cdot\cos x\cdot(1+\cos^2 x)^2 - \sin^3 x\cdot 2(1+\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos^2 x)^4} \\
&= -\frac{\sin^2 x\,\cos x}{(1+\cos^2 x)^3}\left(3(1+\cos^2 x)+4\sin^2 x\right) \\
&= -\frac{\sin^2 x\,\cos x\left(6+\sin^2 x\right)}{(1+\cos^2 x)^3} \qquad \text{(4d)}
\end{aligned}
$$

Druga pochodna ma miejsca zerowe we wszystkich wielokrotnościach $\pi/2$. Wnioskujemy stąd, że $x = \pi/2$ oraz $x = 3\pi/2$ są punktami przegięcia. Zauważmy, że w tym przypadku druga pochodna **nie rozstrzyga** o charakterze ekstremów, gdyż sama znika w ekstremach. O charakterze ekstremów decyduje zmiana znaku pierwszej pochodnej, ekstrema zaś okazują się być czwartego stopnia (dopiero czwarta pochodna badanej funkcji nie znika w ekstremach). Należało się tego spodziewać choćby z rozwinięcia Taylorowskiego pierwszej pochodnej wokół zera:

$$h'(x) \simeq \frac{1}{4}x^3\,, \quad |x| \ll 1\,. \qquad \text{(4e)}$$

Przykład 5

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$i(x) = \sin^2 x + \cos x \tag{5a}$$

Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja jest okresowa, z okresem 2π. Funkcja jest parzysta. Granice w $\pm\infty$ nie istnieją.

Z uwagi na okresowość, zachowanie funkcji wystarczy zbadać w przedziale $[0, 2\pi]$.

Pochodna:

$$i'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) \tag{5b}$$

$$i''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos x \tag{5c}$$

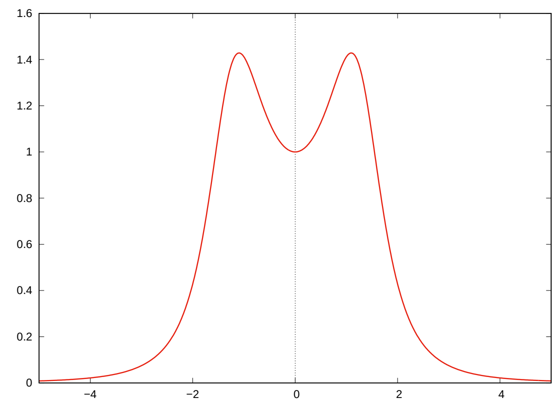
$i'(x) = 0$ gdy $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = \pi/3$, $x = 5\pi/3$.

$$
\begin{aligned}
i''(0) &= 1 > 0 && \text{(5d)}\\
i''(\pi/3) &= -\frac{3}{2} < 0 && \text{(5e)}\\
i''(\pi) &= 3 > 0 && \text{(5f)}\\
i''(5\pi/3) &= -\frac{3}{2} < 0 && \text{(5g)}\\
i''(2\pi) &= 1 > 0 && \text{(5h)}
\end{aligned}
$$

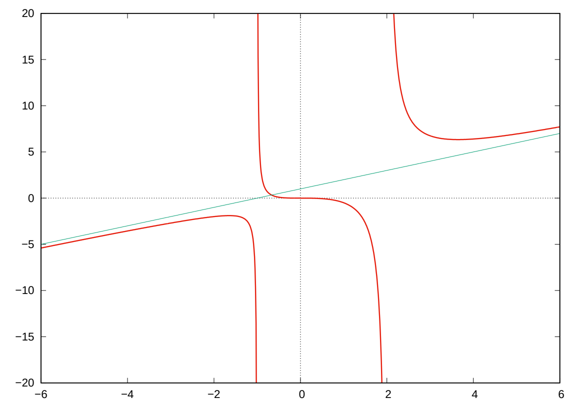
Wobec tego

$$
\begin{array}{c|c|c|l}
x & i'(x) & i''(x) & i(x) \\
\hline
0 & 0 & + & \text{minimum } = 1 \\
0 < x < \pi/3 & + & & \text{rosnąca} \\
\pi/3 & 0 & - & \text{maksimum } = 5/4 \\
\pi/3 < x < \pi & - & & \text{malejąca} \\
\pi & 0 & + & \text{minimum } = -1 \\
\pi < x < 5\pi/3 & + & & \text{rosnąca} \\
5\pi/3 & 0 & - & \text{maksimum } = 5/4 \\
5\pi/3 < x < 2\pi & - & & \text{malejąca} \\
2\pi & 0 & + & \text{minimum } = 1
\end{array}
\tag{5i}
$$

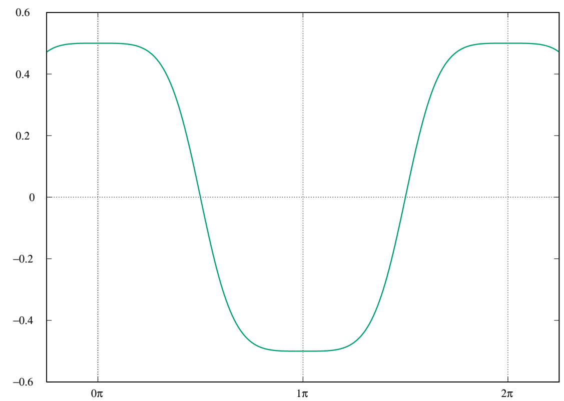
Wykresy



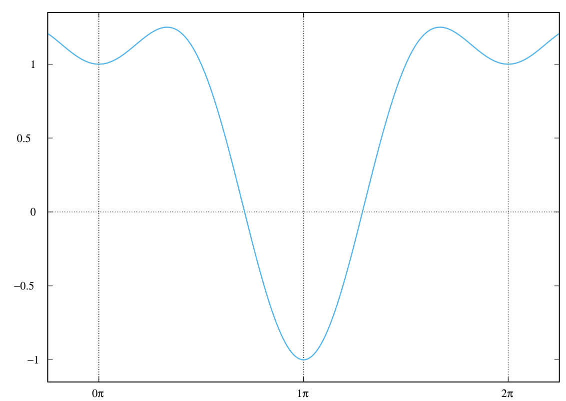
Funkcja (2a)



Funkcja (3a) i jej asymptota



Funkcja (4a)



Funkcja (5a)