Fizyka dla firm — Matematyka

24. Całki funkcji trygonometrycznych i niewymiernych

P. F. Góra
https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

16 stycznia 2023

Proste całki z funkcji trygonometrycznych

"Proste" całki funkcji trygonometrycznych to takie, w których łatwo zastosować można podstawienie $\sin x = t$ lub $\cos x = t$.

Przykład 1

$$
\begin{aligned}
\int \sin^7 x\,dx &= \int \left(\sin^6 x\right) \sin x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin x\,dx \\
&= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x\,dx = -dt \end{array}\right] = -\int (1-t^2)^3\,dt \\
&= -\int (1-3t^2+3t^4-t^6)\,dt = -t+t^3-\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{7}t^7 \\
&= -\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Podobnie obliczamy całki $\int \cos^{2n+1} x\,dx$, $\int \sin^{2n} x \cos x\,dx$, $\int \cos^{2n} \sin x\,dx$.

Przykład 2

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (\cos 2x - 1)^2\,dx \\
&= \left[\begin{array}{c} 2x = u \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right] = \frac{1}{8}\int (\cos^2 u - 2\cos u + 1)\,du \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(u + \cos u \sin u) - 2\sin u + u\right) \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Skorzystaliśmy z tożsamości $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

Podobnie obliczamy całki $\int \sin^{2n} x\, dx$, $\int \cos^{2n} x\, dx$.

Przykład 3

$$
\begin{aligned}
\int \sin^6 x\, dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (\cos 2x - 1)^3\, dx \\
&= \left[\begin{array}{c} 2x = u \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right] = \frac{1}{16}\int \left(\cos^3 u - 3\cos^2 u + 3\cos u - 1\right) du
\end{aligned}
\tag{3a}
$$

Przy czym

$$
\begin{aligned}
\int \cos^3 u\, du &= \int (1-\sin^2 u)\cos u\, du = \left[\begin{array}{c} \sin u = z \\ \cos u\, du = dz \end{array}\right] \\
&= \int (1-z^2)\, dz = z - \frac{1}{3}z^3 = \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u
\end{aligned}
\tag{3b}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\int \sin^6 x \, dx &= \frac{1}{16}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u - \frac{3}{2}(u + \sin u \cos u) + 3\sin u - u\right) \\
&= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{5}{32}x \qquad \text{(3c)}
\end{aligned}
$$

Podstawienie “uniwersalne”

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\
&= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^{\,2}\frac{x}{2}}
\end{aligned}
\tag{4a}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad (4b)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{tg}\, x = \frac{\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}}{\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad (4c)
$$

W ten sposób wyraziliśmy funkcje sinus, kosinus, tanges poprzez *wymierne* funkcje tangensa argumentu połówkowego.

Jeśli zatem mamy do obliczenia całkę z dowolnej **wymiernej** funkcji sinusa, kosinusa, tangensa, możemy ją obliczyć poprzez “podstawienie uniwersalne”:

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x)\, dx = \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = u \\ x = 2\, \mathrm{arc\,tg}\, u \\ dx = \frac{2}{1+u^2}\, du \end{array} \right] = \int \widetilde{\mathcal{R}}(u)\, du \tag{5}$$

gdzie $\widetilde{\mathcal{R}}$ jest *wymierną* funkcją swojego argumentu.

Przykład 4

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} = 2\int \frac{du}{u^2+3} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \left[\begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{3}} = t \\ du = \sqrt{3}\,dt \end{array} \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Przykład 5

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \tag{7a}$$

Ten przykład ma pokazać, że do problemu obliczania całek z funkcji trygonometrycznych nie należy podchodzić mechanicznie. Do całki (7a) moglibyśmy zastosować “podstawienie uniwersalne” i owszem, dostalibyśmy funkcję wymierną, ale jej mianownik byłby wielomianem stopnia ósmego. Zamiast tego najpierw korzystamy z tożsamości trygonometrycznych.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{dx}{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2} = \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)}$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2x = y \\ dx = \frac{1}{2}dy \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 y} = \dots \tag{7b}$$

Dopiero teraz korzystamy z podstawienia $\mathrm{tg}\,\frac{y}{2} = u$:

$$\dots = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2 - 2u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1+u^2}{1+u^4}\,du = \int \frac{1+u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}\,du \tag{7c}$$

Dokonujemy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{1+u^2}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)} \equiv \frac{Au+B}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{Cu+D}{u^2+\sqrt{2}u+1} \tag{7d}$$

$A = C = 0$, $B = D = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}+1}\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{du}{\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}u-1)^2+1\right]}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}u+1)^2+1\right]}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}u-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}u+1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}+1\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x+1) \qquad \text{(7e)}
\end{aligned}
$$

Całki funkcji cyklometrycznych

Całkujemy przez części:

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x \, dx &= \int (x)' \arcsin x \, dx \\
&= x \arcsin x - \int x \, (\arcsin x)' \, dx \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \left[\begin{array}{c} 1 - x^2 = t^2 \\ x \, dx = -t \, dt \end{array} \right] = x \arcsin x + \int \frac{t}{\sqrt{t^2}} \, dt \\
&= x \arcsin x + t = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Przykład 6

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx = \left[\begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \\ x = \sin t \end{array} \right] = \int t \, \sin^2 t \, dt \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} \int t \, \sin^2 t \, dt &= \int t \, \sin t \, (-\cos t)' \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \int (t \sin t)' \cos t \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \int \sin t \cos t \, dt + \int t \, \cos^2 t \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} t^2 - \int t \, \sin^2 t \, dt \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx = \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x \tag{9c}$$

Całki z funkcji niewymiernych

Całki z funkcji niewymiernych często nie dają się wyrazić przez skończoną kombinację funkcji elementarnych — zwłaszcza jeśli wykładniki są niewymierne. Istnieje bardzo dużo szczegółowych przypadków, wobec czego omówimy tylko przypadek pierwiastów z trójmianu kwadratowego.

Jeśli wyróżnik trójmianu jest dodatni, sprowadzamy wyrażenie do postaci $\sqrt{1-x^2}$, jeśli natomiast wyróżnik trójmianu jest ujemny, sprowadzamy do postaci $\sqrt{x^2+k}$, $k > 0$. Wówczas stosujemy podstawienie Eulera $x + \sqrt{x^2+k} = t$ i próbujemy doprowadzić wyrażenie podcałkowe do postaci funkcji wymiernej.

Przykład 7

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \dots && \text{(10a)}\\
x + \sqrt{1+x^2} &= t && \text{(10b)}\\
\sqrt{1+x^2} &= t - x && \text{(10c)}\\
1 + x^2 &= t^2 - 2tx + x^2 && \text{(10d)}\\
2tx &= t^2 - 1 && \text{(10e)}\\
x &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) && \text{(10f)}\\
dx &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt && \text{(10g)}\\
\sqrt{1+x^2} &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) && \text{(10h)}
\end{aligned}
$$

Wobec tego

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| \qquad \text{(10i)}
\end{aligned}
$$

Przykład 8

Niech $k > 0$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2+k} = t \\ x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{t}\right) \\ dx = \frac{t^2+k}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+k} = t - x = \frac{t^2+k}{2t} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+k}{2t^2}}{\frac{t^2+k}{2t}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| = \operatorname{ar\,cosh} x\big|_{k=1} \tag{11}$$

Uwaga: Jeżeli całkę da się obliczyć za pomocą “prostego” podstawienia $x^2 \pm k = t$, należy tak zrobić, jak w całkach $\int x\sqrt{x^2+k}\,dx$, $\int x\,dx/\sqrt{x^2+k}$.

Przykład 9

$$
\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+k}\,dx &= \left[\begin{array}{l} x^2+k=t \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \\ x^2 = t-k \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int (t-k)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}\,dt - \frac{k}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{k}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{5}(x^2+k)^{\frac{5}{2}} - \frac{k}{3}(x^2+k)^{\frac{3}{2}} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Przykład 10

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ 1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t \end{array} \right] \\
&= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \\
&= \frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} \qquad (13)
\end{aligned}
$$