Fizyka dla firm — Matematyka

23. Całki nieoznaczone: całkowanie funkcji wymiernych

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

12 stycznia 2023

Funkcje wymierne są ilorazami wielomianów, $f(x) = P(x)/Q(x)$, gdzie P, Q są wielomianami. W celu obliczenia całki nieoznaczonej z funkcji wymiernej

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \tag{1}$$

należy funkcję podcałkową maksymalnie uprościć, a następnie przekształcić do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów na całki funkcji elementarnych.

1. Jeżeli stopień licznika jest większy lub równy stopniowi mianownika, $\deg P(x) \geqslant \deg Q(x)$, dzielimy licznik przez mianownik z resztą (!): $P(x) : Q(x) = W(x)$ r. $R(x)$, gdzie W, R są wielomianami, przy czym $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Otrzymujemy

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int W(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx \tag{2}$$

Całkę z wielomianu $\int W(x)\,dx$ umiemy łatwo policzyć, więc tym członem nie będziemy się już zajmować. Pozostaje całka z funkcji wymiernej, w której stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.

2. Jeżeli $R(x)$ jest proporcjonalne do pochodnej $Q(x)$, możemy zastosować wzór na pochodną logarytmiczną:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{k \cdot Q'(x)}{Q(x)}\,dx = k \ln |Q(x)| \tag{3}$$

gdzie $k = \text{const.}$

Przykład 1

$$\int \frac{3x^5 - \frac{1}{2}}{x^6 - x + 8}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^6 - x + 8)'}{x^6 - x + 8}\,dx = \frac{1}{2} \ln |x^6 - x + 8| \tag{4}$$

Jeżeli ten przypadek nie zachodzi, należy przeprowadzić. . .

3. Rozkład na ułamki proste

Rozpatrujemy funkcję wymierną $R(x)/Q(x)$, gdzie stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, i to mniejszy o co najmniej 2 (w przypadku licznika, którego stopień jest mniejszy o jeden od stopnia mianownika, najwyższy stopień licznika traktujemy jako część pochodnej mianownika).

Dokonujemy faktoryzacji $Q(x)$ na iloczyn czynników liniowych, czynników liniowych w pewnych potęgach (odpowiada to wielokrotnym miejscom zerowym) i nierozkładalnych trójmianów kwadratowych; te ostatnie odpowiadają zespolonym miejscom zerowym, ale przy całkowaniu funkcji rzeczywistych zespolone miejsca zerowe wielomianów nas nie interesują. Następnie przedstawiamy funkcję podcałkową jako sumę ułamków, których mianownikami są kolejne nietrywialne czynniki rozkładu $Q(x)$.

Widać, że jeżeli $\deg Q(x) \geqslant 5$, programu tego, poza przypadkami szczególnymi, nie daje się przeprowadzić, jako że nie istnieją ogólne algebraiczne wzory na pierwiastki wielomianów stopnia piątego i wyższych.

Przykład 2

Obliczmy całkę

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} \tag{5a}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \tag{5b}$$

Znak $\equiv$ oznacza, że równość ma zachodzić **tożsamościowo:** zgadzać się muszą wszystkie współczynniki przy odpowiednich potęgach.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1} \tag{5c}$$

Zatem

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \tag{5d}$$

a więc $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \qquad \text{(5e)}\end{aligned}$$

Przykład 3

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-5}{x^2-1}\,dx &= \frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx - 5\int\frac{dx}{x^2-1} \\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2-1| - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \\ &= \ln\frac{(x+1)^4}{|x-1|} \end{aligned} \tag{6}$$

Przykład 4

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \tag{7a}$$

$$\frac{1}{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}} \tag{7b}$$

$A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$.

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right| \tag{7c}$$

Przykład 5

Oblicz całkę

$$\int \frac{x+1}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx \tag{8a}$$

Wielomian w mianowniku ma współczynniki całkowite, można więc poszukać jego pierwiastka wśród dzielników wyrazu wolnego. Liczba 1 jest pierwiastkiem, zatem

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(b_2x^2+b_1x+b_0) \tag{8b}$$

Wymnażając nawiasy po prawej stronie i uzgadniając współczynniki, dostajemy $b_2=1$, $b_1=-5$, $b_0=6$. Pierwiastki trójmianu kwadratowego znajdujemy standardową metodą.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \tag{8c}$$

$$\frac{x+1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + (6A+3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \tag{8d}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=1 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \tag{8e}$$

$A=1$, $B=-3$, $C=2$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} - 3\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{x-3} \\
&= \ln|x-1| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3| \\
&= \ln\left|\frac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)^3}\right| \qquad \text{(8f)}
\end{aligned}
$$

Przykład 6

Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} \tag{9a}$$

Wielomian w mianowniku ma współczynniki całkowite. Szukamy pierwiastka pośród dzielników wyrazu wolnego. Liczba -1 jest pierwiastkiem.

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) \tag{9b}$$

Wymnażając nawiasy i uzgadniając współczynniki dostajemy $b_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_0 = 2$. Trójmian $x^2 + 2x + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)} &\equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \\
&= \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)} \\
&= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+(2A+C)}{(x+1)(x^2+2x+2)}
\end{aligned}
\tag{9c}
$$

$$
\begin{cases}
A+B=0 \\
2A+B+C=0 \\
2A+C=1
\end{cases}
\tag{9d}
$$

$A=1$, $B=-1$, $C=-1$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+3x^2+4x+2} &= \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx \\
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) \qquad \text{(9e)}
\end{aligned}
$$

Potęgi wyrażeń liniowych w mianowniku

Rozpatrzmy całkę

$$
\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2}\,dx &= a\int \frac{x-\alpha+\alpha+\frac{b}{a}}{(x-\alpha)^2}\,dx \\
&= a\int \frac{dx}{x-\alpha} + (\alpha a + b)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} \\
&= a\ln|x-\alpha| - \frac{\alpha a + b}{x-\alpha} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Ten sam wynik moglibyśmy uzyskać dokonując następującego rozkładu na ułamki proste:

$$
\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2} \equiv \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} = \frac{A(x-\alpha)+B}{(x-\alpha)^2} \qquad (11a)
$$

$$
\begin{cases} A = a \\ -\alpha A + B = b \end{cases} \qquad (11b)
$$

skąd $A = a$, $B = \alpha a + b$.

Podobnie w przypadku całki

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-\alpha)^3}\, dx \tag{12}$$

dokonujemy następującego rozkładu na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{ax^2 + bx + c}{(x-\alpha)^3} &\equiv \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3} \\ &= \frac{Ax^2 + (-2\alpha A + B)x + \alpha^2 A - \alpha B + C}{(x-\alpha)^3} \end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{cases} A = a \\ -2\alpha A + B = b \\ \alpha^2 A - \alpha B + C = c \end{cases} \tag{13b}$$

skąd $A = a$, $B = b + 2\alpha a$, $C = c + \alpha b + \alpha^2$ i ostatecznie

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-\alpha)^3}\, dx = a \ln|x-\alpha| - \frac{b+\alpha a}{x-\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{(x-\alpha)^2} \tag{14}$$

Uogólniając te dwa przypadki, stwierdzamy, że w wypadku występowania w mianowniku potęg wyrażeń liniowych, dokonujemy następującego rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{(x-\alpha)^n} \equiv \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} \tag{15}$$

Przykład 7

Obliczmy całkę

$$\int \frac{1}{x^5 - x^3}\,dx = \int \frac{1}{x^3(x-1)(x+1)}\,dx \tag{16a}$$

Dokonujemy rozkładu na ułamki proste

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1} \tag{16b}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} C + D + E = 0 \\ B + D - E = 0 \\ A - C = 0 \\ B = 0 \\ -A = 1 \end{array} \right. \tag{16c}$$

$A = C = -1$, $B = 0$, $D = E = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^3}\,dx &= -\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| \end{aligned} \tag{16d}$$

Przykład 8

Obliczmy całkę

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20}\, dx \tag{17a}$$

Należy rozpocząć od faktoryzacji wielomianu znajdującego się w mianowniku. Jest to wielomian o współczynnikach całkowitych, warto więc sprawdzić, czy aby dzielniki wyrazu wolnego nie są jego pierwiastkami. Istotnie, liczba 1 jest pierwiastkiem, zatem dokonujemy faktoryzacji

$$x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 = (x-1)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \tag{17b}$$

Wymnażając nawiasy po prawej stronie i uzgadniając współczynniki, dostajemy $b_3 = 1$, $b_2 = -9$, $b_1 = 24$, $b_0 = -20$. Zatem

$$x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 = (x-1)(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \tag{17c}$$

Uzyskany wielomian trzeciego stopnia *także* ma współczynniki całkowite, więc warto poszukać jego pierwiastków całkowitych. Okazuje się, że liczba 5 jest pierwiastkiem. Zatem

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 &= (x-1)(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \\ &= (x-1)(x-5)(c_2x^2 + c_1x + c_0) \end{aligned} \tag{17d}$$

Wymnożywszy dwa ostatnie nawiasy i uzgodniwszy współczynniki, dostajemy

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 &= (x-1)(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \\ &= (x-1)(x-5)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x-1)(x-5)(x-2)^2 \end{aligned} \tag{17e}$$

Mamy więc

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x^4-10x^3+33x^2-44x+20}\,dx = \int \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-5)(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x+3}{(x-5)(x-2)^2}\,dx \tag{17f}$$

gdyż tak się składa, że jeden czynnik z rozkładu licznika upraszcza się z czynnikiem z rozkładu mianownika. Możemy teraz przystąpić do rozkładu na ułamki proste.

$$
\begin{aligned}
\frac{x+3}{(x-5)(x-2)^2} &\equiv \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}\\
&= \frac{A(x-2)^2+B(x-2)(x-5)+C(x-5)}{(x-5)(x-2)^2}\\
&= \frac{(A+B)x^2+(-4A-7B+C)x+(4A+10B-5C)}{(x-5)(x-2)^2}
\end{aligned}
\tag{17g}
$$

skąd $A = \frac{8}{9}$, $B = -\frac{8}{9}$, $C = -\frac{5}{3}$ i całka

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20}\, dx &= \frac{8}{9} \int \frac{dx}{x-5} - \frac{8}{9} \int \frac{dx}{x-2} \\
&- \frac{5}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= \frac{8}{9} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2}
\end{aligned} \tag{17h}$$

Przykład 9

Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx \tag{18}$$

Jeden z trójmianów w mianowniku ma pierwiastki rzeczywiste, drugi nie ma. Przeprowadzamy rozkład na ułamki proste:

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{19}$$

Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika i uzgodnieniu współczynników, dostajemy

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{array} \right. \tag{20}$$

skąd $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$ i

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4-1}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x \end{aligned} \tag{21}$$

Przykład 10

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx \tag{22a}$$

Tutaj sytuacja jest inna: Mianownik nie ma pierwiastów rzeczywistych. Skądinąd zespolone pierwiastki mianownika są łatwe do znalezienia — są to czwarte pierwiastki z -1, czyli drugie pierwiastki z $\pm i$. Są to liczby $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$. Biorąc iloczyny z pierwiastkami sprzężonymi dostajemy

$$\left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = x^2-\sqrt{2}x+1 \tag{22b}$$

$$\left(x+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = x^2+\sqrt{2}x+1 \tag{22c}$$

$$(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) = x^4+1 \tag{22d}$$

Zatem

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx \tag{22e}$$

Dokonuję rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} \tag{22f}$$

Otrzymujemy $A = -1/(2\sqrt{2})$, $C = 1/(2\sqrt{2})$, $B = D = 1/2$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2}+\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2}-\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&+ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \qquad (22g)
\end{aligned}
$$

Dwie pierwsze całki po prawej stronie (22g) mają postać $\int (f'/f)\,dx$, a więc nie trzeba ich dalej przekształcać. Pozostają jeszcze dwie następne całki, które znaną techniką musimy doprowadzić do całki dającej arc tg.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} &= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}x-1)^2+1\right]} \\
&= \left[\begin{array}{c}\sqrt{2}x-1=s\\ dx=\frac{1}{\sqrt{2}}ds\end{array}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}x-1) \qquad \text{(22h)}\\
\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}x+1) \qquad \text{(22i)}
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x-1) + \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x+1) \right) \quad \text{(22j)}$$

Przykład 11

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+1=t \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} \qquad (23)$$

Przykład 12

Sposób rozwiązania tego przykładu jest mniej oczywisty:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \tag{24a}$$

Pierwsza z powyższych całek jest oczywista, drugą będziemy obliczać całkując przez części.

Korzystając z wyniku (23) mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int x\cdot\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)'dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int (x)'\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x \end{aligned} \tag{24b}$$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} \tag{24c}$$