Fizyka dla firm — Matematyka

22. Całka nieoznaczona

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

9 stycznia 2023

Funkcja pierwotna

Obliczanie całek nieoznaczonych jest operacją odwrotną do różniczkowania. Mianowicie, mówimy że

$$\int f(x)dx = F(x) + C \iff \frac{dF}{dx} = f(x) \tag{1}$$

gdzie C jest pewną stałą, zwaną *stałą całkowania*. Funkcję $F(x)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji $f(x)$. Z własności różniczkowania wynika, że do funkcji pierwotnej można dodać dowolną stałą; w przyszłości zazwyczaj będziemy stałą całkowania pomijać we wzorach.

Podstawowe własności całki nieoznaczonej

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{2}$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \tag{3}$$

gdzie k jest dowolną stałą. Własności te wynikają wprost z własności różniczkowania.

Przykład 1

$$\int dx = x + C \tag{4}$$

gdyż $x' = 1$.

Trudność w obliczaniu całek nieoznaczonych polega na tym, że, w przeciwieństwie do różniczkowania, nie ma prostego zestawu reguł pozwalających wyznaczać funkcje pierwotne. Wiele “prostych”, “porządnych” funkcji nie ma funkcji pierwotnych (całek oznaczonych), które dałoby się zapisać w zwarty sposób.

Przykład 2

Można udowodnić, że całki

$$\int e^{-x^2} dx \tag{5}$$

nie da się wyrazić za pomocą skończonej kombinacji funkcji elementarnych.

Całki funkcji elementarnych

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \quad a \neq -1 \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \tag{7}$$

$$\int e^x dx = e^x \tag{8}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x \tag{9}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \tag{12}$$

Przykład 3

$$\int \left(5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \int \left(5x^2 - 6x + 3 - 2x^{-1} + 5x^{-2}\right) dx$$
$$= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 3x - 2\ln|x| - \frac{5}{x} \qquad (13)$$

Uwaga o stałej całkowania

Ponieważ

$$(\operatorname{arc}\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{14a}$$

mamy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\operatorname{arc}\cos x\,. \tag{14b}$$

Wynik (14b) jest *inny*, niż ten dany wzorem (11). Aby rozstrzygnąć tę pozorną sprzeczność, zauważmy, że

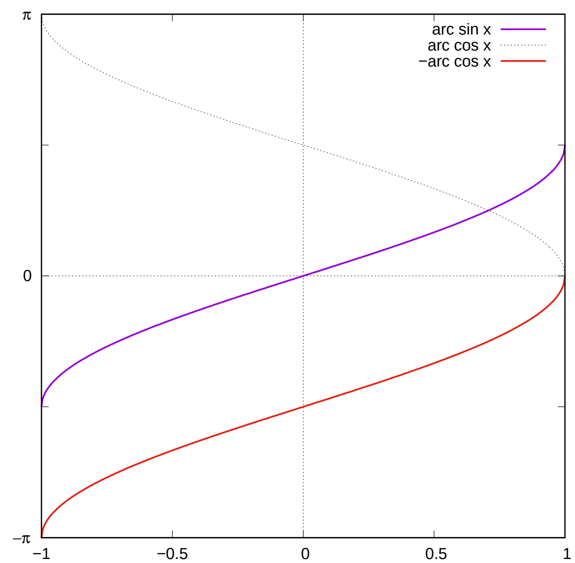
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cos x\right) = \cos\left(-\operatorname{arc}\cos x\right) = x = \sin\left(\operatorname{arc}\sin x\right) \tag{14c}$$

więc biorąc pod uwagę monotoniczność funkcji sinus *w przedziale odwra-*

calności,

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \tag{14d}$$

Widzimy, że funkcje (11), (14b) są równe *z dokładnością do stałej*, równej w tym wypadku $\pi/2$. A całka oznaczona (funkcja pierwotna) jest określona z dokładnością do stałej całkowania.



Dziękuję studentowi, który zwrócił mi na to uwagę w trakcie wykładu.

Dwie inne całki z funkcji elementarnych

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ar\,sinh} x)' &= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{ar\,sinh} x \qquad (16)
$$

Podobnie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{ar\,cosh} x \tag{17}$$

Całkowanie przez podstawienie

Jeżeli $f(x)$ jest ciągła w pewnym przedziale, a $g(x)$ ma w tym przedziale ciągłą pochodną, to w tym przedziale

$$\int f(g(x))\, g'(x) dx = \int f(u) du\,, \tag{18}$$

po czym po scałkowaniu prawej strony należy w wyniku podstawić $u = g(x)$. Wzór (18) wynika wprost ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

Przykład 4

$$\int \cos(2x)dx = \left[\begin{array}{c} 2x = u \\ 2dx = du \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right] = \int \frac{1}{2}\cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin(2x) \tag{19}$$

Przykład 5

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \int \left(e^{\ln a}\right)^x dx = \int e^{x\ln a} dx = \left[\begin{array}{c} x\ln a = t \\ dx = \frac{1}{\ln a}dt \end{array} \right] = \frac{1}{\ln a}\int e^t dt \\ &= \frac{1}{\ln a}e^t = \frac{1}{\ln a}a^x\,, \end{aligned} \tag{20}$$

przy czym zakładamy, że $a > 0$, $a \neq 1$.

Przykład 6

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \left[\begin{array}{c} 2x-1=s \\ dx = \frac{1}{2}ds \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{2}\ln|s| = \frac{1}{2}\ln|2x-1| \quad (21)$$

Przykład 7

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3-3}}\,dx &= \left[\begin{array}{c} 2x^3-3=t^2 \\ 6x^2dx = 2t\,dt \\ x^2dx = \frac{1}{3}t\,dt \end{array} \right] = \frac{1}{3}\int \frac{t}{\sqrt{t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\int dt = \frac{1}{3}t \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{2x^3-3} \end{aligned} \quad (22)$$

Przykład 8

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left[\begin{array}{c} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = u \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du \end{array}\right] = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\, u = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \tag{23}$$

Jest to ogólna zasada postępowania z “nierozkładalnymi” trójmianami kwadratowymi. Z kolei trójmiany o wyróżniku dodatnim doprowadzamy do postaci $\pm(1-u^2)$.

Przykład 9

Niech $n \neq 1$.

$$\int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+a^2=u \\ x\,dx=\frac{1}{2}\,du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int u^{-n}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}u^{-n+1}$$
$$= -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \qquad (24)$$

Przykład 10

W wyniku takiego podstawienia, jak w poprzednim przypadku

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) \qquad (25)$$

Zastosowanie pochodnej logarytmicznej

W ostatnim przykładzie licznik, z dokładnością do stałej, był pochodną mianownika. Łatwo to uogólnić:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} f(x) = s \\ f'(x)\,dx = ds \end{array}\right] = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| = \ln|f(x)| \tag{26}$$

Proszę przypomnieć sobie wzór na pochodną logarytmiczną.

Przykład 11

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\, dx = dt \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1 + t^2}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg}\left(e^x\right) \tag{27}$$

Przykład 12

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{c} x+1=s \\ dx=ds \end{array}\right] = \int \frac{s-2}{s^{\frac{1}{3}}}\,ds = \int s^{\frac{2}{3}}\,ds - 2\int s^{-\frac{1}{3}}\,ds$$
$$= \frac{1}{\frac{2}{3}+1}s^{\frac{2}{3}+1} - \frac{2}{-\frac{1}{3}+1}s^{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - 3(x+1)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{3}{5}(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad (28)$$

Przykład 13

$$
\begin{aligned}
\int xe^{-x^2}\,dx &= \left[\begin{array}{c} x^2 = s \\ 2x\,dx = ds \\ x\,dx = \frac{1}{2}ds \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int e^{-s}\,ds = \left[\begin{array}{c} -s = z \\ ds = -dz \end{array}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int e^{z}\,dz = -\frac{1}{2}e^{z} = -\frac{1}{2}e^{-s} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Całkowanie przez części

Ze wzoru na pochodną iloczynu, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, wynika, że

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx\,. \tag{30}$$

Wzór (30) nazywa się “wzorem na całkowanie przez części”. Jest on niezwykle pomocny w całkowaniu niektórych funkcji.

Przykład 14

$$
\begin{aligned}
\int x\, e^x\, dx &= \int x\, (e^x)'\, dx = x\, e^x - \int (x)'\, e^x\, dx \\
&= x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x = (x-1)\, e^x
\end{aligned} \tag{31}
$$

Przykład 15

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos(\omega x)\, dx &= \int x^2 \left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right)' dx \\
&= \frac{1}{\omega}x^2 \sin(\omega x) - \frac{2}{\omega}\int x \sin(\omega x)\, dx \\
&= \frac{1}{\omega}x^2 \sin(\omega x) - \frac{2}{\omega}\int x \left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)\right)' dx \\
&= \frac{1}{\omega}x^2 \sin(\omega x) + \frac{2}{\omega^2}x\cos(\omega x) - \frac{2}{\omega^2}\int \cos(\omega x)\, dx \\
&= \frac{1}{\omega}x^2 \sin(\omega x) + \frac{2}{\omega^2}x\cos(\omega x) - \frac{2}{\omega^3}\sin(\omega x) \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Wzór na całkowanie przez części został zastosowany dwukrotnie.

Przykład 16

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x(-\cos x)'\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (\sin x)' \cos x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx \\
&= x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x\,dx && \text{(33a)} \\
2\int \sin^2 x\,dx &= x - \sin x \cos x && \text{(33b)} \\
\int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) && \text{(33c)}
\end{aligned}
$$

Przykład 17

$$\int x\, e^{x^2}(x^2+1)\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+1=u \\ 2x\,dx = du \\ x\,dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}\int e^{u-1}u\,du = \frac{1}{2e}\int e^u u\,du =$$

całkujemy przez części

$$= \frac{1}{2e}\int (e^u)'\,u\,du = \frac{1}{2e}e^u u - \frac{1}{2e}\int e^u (u)'\,du = \frac{1}{2e}e^u u - \frac{1}{2e}\int e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2e}e^u u - \frac{1}{2e}e^u = \frac{1}{2e}e^u(u-1) = \frac{1}{2e}e^{x^2+1}(x^2+1-1) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} \tag{34}$$