Fizyka dla firm — Matematyka

21. Przykłady od Sasa do Lasa*

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

5 stycznia 2023

*Kto wie, skąd taki tytuł?

Przykład 1

Znajdź wartości własne i unormowane wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -2i \\ -i & 1 & i \\ 2i & -i & 1 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

Rozwiązanie: Równanie charakterystyczne ma postać

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & i & -2i \\ -i & 1-\lambda & i \\ 2i & -i & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^3 + i\cdot i\cdot(2i) + (-i)\cdot(-i)\cdot(-2i) \\
&- (-2i)\cdot(2i)\cdot(1-\lambda) - (-i)\cdot i\cdot(1-\lambda) \\
&- (-i)\cdot i\cdot(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^3 - 6\right] \\
&= (1-\lambda)(\lambda-1+\sqrt{6})(\lambda-1-\sqrt{6}) \qquad \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

a zatem wartościami własnymi macierzy (1a) są liczby $\lambda = 1, 1-\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$.

Wektory własne: Niech wektor własny ma postać $[a, b, c]$. Dla $\lambda = 1$ dostaję

$$
\begin{aligned}
ib - 2ic &= 0 && \text{(1c)}\\
-ia + ic &= 0 && \text{(1d)}\\
2ia - ib &= 0 && \text{(1e)}
\end{aligned}
$$

skąd $c = a, b = 2a$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1f}$$

Dla $\lambda = 1 - \sqrt{6}$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sqrt{6}a + ib - 2ic &= 0 && \text{(1g)}\\
-ia + \sqrt{6}b + ic &= 0 && \text{(1h)}\\
2ia - ib + \sqrt{6}c &= 0 && \text{(1i)}
\end{aligned}
$$

skąd $a = (2\sqrt{6}i - 1)c/5$, $b = (-i\sqrt{6} - 2)c/5$, więc po unormowaniu

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{6}i - 1 \\ -i\sqrt{6} - 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1j}$$

Analogicznie, dla $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ otrzymujemy

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{bmatrix} -2\sqrt{6}i - 1 \\ i\sqrt{6} - 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1k}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^\dagger \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{60} \left((-2\sqrt{6}i - 1)^2 + (\sqrt{6}i - 2)^2 + 5^2 \right) \\ &= \frac{1}{60} \left(-4 \cdot 6 + 4\sqrt{6}i + 1 - 6 - 4\sqrt{6}i + 4 + 25 \right) = 0 \end{aligned}$$

Przykład 2

Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2} \tag{2a}$$

Wprowadźmy zmienną pomocniczą $u = x + 1$. W języku tej zmiennej szereg (2a) przybiera postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^2} \tag{2b}$$

Jest to “zwykły” szereg potęgowy. Do szeregu (2b) stosuję kryterium d'Alamberta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1 \tag{2c}$$

skąd wynika, że promień zbieżności szeregu (2b) wynosi 1, czyli szereg jest zbieżny dla $|u| < 1$.

Ponieważ $u = x + 1$, szereg (2a) jest zbieżny dla $x \in (-2, 0)$.

Przykład 3

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3} \tag{3a}$$

Widać, że w granicy otrzymujemy $(\sqrt{1}-1)/(\sqrt{9}-3)$, czyli symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.

Sposób I - przekształcenia algebraiczne: Uzupełniamy do różnicy kwadratów

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}} \\
&= \underbrace{\frac{x+1-1}{x+9-9}}_{=1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}} \\
&= \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+1}+1} \qquad (3b)
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{1}+1} = \frac{6}{2} = 3\,. \qquad (3c)
$$

Sposób II - zastosowanie reguły de l'Hospitala:

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \tag{3d}$$

$$\left(\sqrt{x+9}-3\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} \tag{3e}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)'}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+9}}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x+9}{x+1}} = \sqrt{9} = 3\,.\end{aligned} \tag{3f}$$

Przykład 4

Zbadaj przebieg zmienności (dziedzina, granice na krańcach dziedziny, asymptoty, ekstrema, przedziały monotoniczności) funkcji

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-2} \tag{4a}$$

Rozwiązanie: Mianownik ma postać

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \tag{4b}$$

a więc zeruje się dla $x = -1$ oraz $x = 2$ i dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$. Funkcja nie jest okresowa ani nie posiada określonej parzystości. Jedynym miejscem zerowym jest $x = 3$.

Granice w nieskończonościach wynoszą

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{x-1-\frac{2}{x}} = \frac{1-\frac{3}{\pm\infty}}{\pm\infty-1-\frac{2}{\pm\infty}} = \frac{1}{\pm\infty} = 0 \tag{4c}$$

Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji w $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{0^- \cdot (-3)} = -\infty \tag{4d}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{0^+ \cdot (-3)} = +\infty \tag{4e}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{3 \cdot 0^-} = +\infty \tag{4f}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{3 \cdot 0^+} = -\infty \tag{4g}$$

Proste $x = -1$, $x = 2$ są asymptotami pionowymi badanej funkcji.

Pochodna funkcji:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-3)'(x^2-x-2)-(x-3)(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2} \\
&= \frac{x^2-x-2-(x-3)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2} \\
&= \frac{-(x-1)(x-5)}{(x^2-x-2)^2} \qquad \text{(4h)}
\end{aligned}
$$

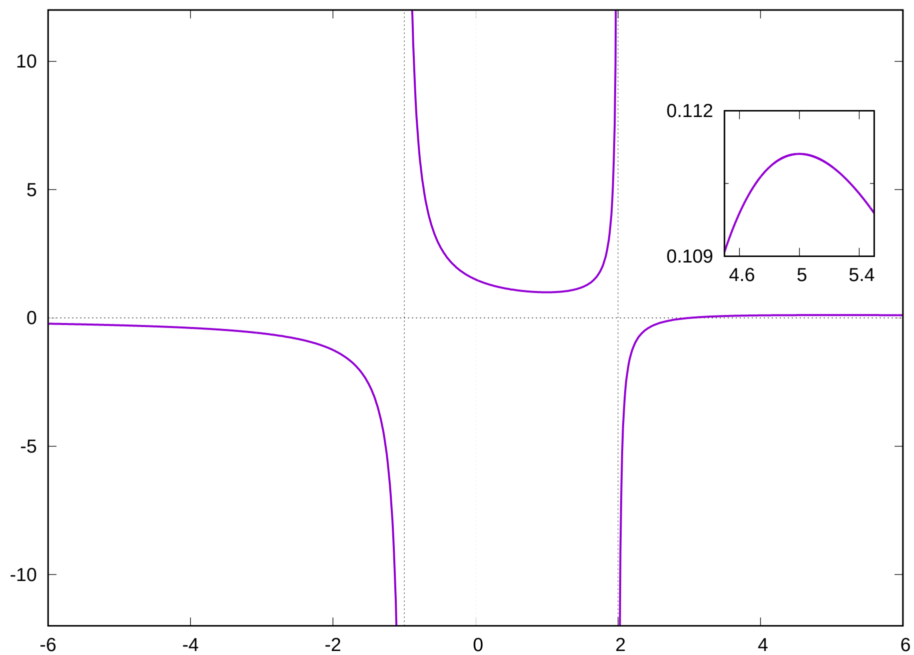
Ponieważ mianownik w (4h) jest nieujemny, o znaku decyduje znak licznika. Tak więc

$$
\begin{array}{c|c|c}
x < -1 & f'(x) < 0 & \text{funkcja malejąca} \\
\hline
-1 < x < 1 & f'(x) < 0 & \text{funkcja malejąca} \\
\hline
x = 1 & f'(x) = 0 & \text{ekstremum} \\
\hline
1 < x < 2 & f'(x) > 0 & \text{funkcja rosnąca} \\
\hline
2 < x < 5 & f'(x) > 0 & \text{funkcja rosnąca} \\
\hline
x = 5 & f'(x) = 0 & \text{ekstremum} \\
\hline
x > 5 & f'(x) < 0 & \text{funkcja malejąca}
\end{array}
\tag{4i}
$$

Charakter ekstremów oceniamy po tym, jak zmienia się monotoniczność funkcji. W $x = 1$ funkcja z malejącej zamienia się w rosnącą, a więc jest tam minimum. W $x = 5$ funkcja z rosnącej zmienia się w malejącą, a więc jest tam maksimum.

$$f_{\min} = f(1) = \frac{1-3}{1-1-2} = 1 \tag{4j}$$

$$f_{\max} = f(5) = \frac{5-3}{25-5-2} = \frac{1}{9} \tag{4k}$$



Przykład 5

Znajdź dziedzinę, granice na krańcach dziedziny, pochodną, ewentualne asymptoty i ekstrema funkcji

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \tag{5a}$$

Rozwiązanie: Ponieważ podstawa potęgi musi być nieujemna, dziedziną funkcji (5a) jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}^+$. Aby znaleźć granice funkcji (5a) w 0, $+\infty$, przedstawmy tę funkcję w postaci

$$x^{\frac{1}{x}} \equiv \exp\left[\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right] = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \tag{5b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = \exp(\infty\cdot(-\infty)) = \exp(-\infty) = 0 \tag{5c}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \tag{5d}$$

gdzie skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala. Wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(0) = 1\,. \tag{5e}$$

Płynie stąd wniosek, że prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji (5a) w $+\infty$.

Aby znaleźć pochodną funkcji (5a) możemy skorzystać z postaci (5b).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)' = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \\ &= \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} \end{aligned} \tag{5f}$$

Ten sam wynik można uzyskać korzystając z “pochodnej logarytmicznej”:

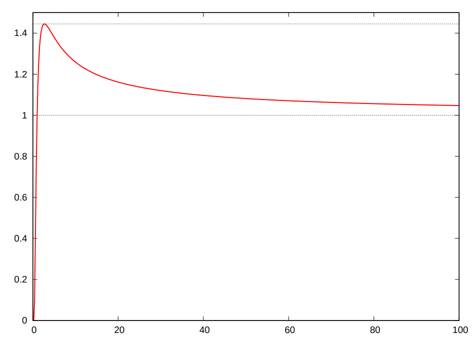
$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))' \tag{5g}$$

co w sposób oczywisty natychmiast prowadzi do (5f).

Znak pochodnej $f'(x)$ zależy od znaku wyrażenia $1 - \ln x$ (mianownik i eksponenta są dodatnie). Wobec tego

$0 < x < e$	$f'(x) > 0$	funkcja rosnąca
$x = e$	$f'(x) = 0$	ekstremum
$x > e$	$f'(x) < 0$	funkcja malejąca

Ponieważ w $x = e$ funkcja zmienia się z rosnącej w malejącą, punkt $x = e$ oznacza maksimum o wartości $f_{\max} = e^{\frac{1}{e}} \simeq 1.4445$.



Przykład 6

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$g(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos^3 x} \tag{6a}$$

Dziedzina: Funkcja jest określona poza punktami

$$\begin{aligned} 1 + \cos^3 x &= 0 && \text{(6b)} \\ \cos^3 x &= -1 && \text{(6c)} \\ \cos x &= -1 && \text{(6d)} \\ x &= (2k+1)\pi\,, \ k \in \mathbb{Z} && \text{(6e)} \end{aligned}$$

Funkcja jest parzysta, $g(-x) = g(x)$ i okresowa, z okresem 2π. Granice w $\pm\infty$ nie istnieją.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1+\cos^3 x} = \frac{\lim\limits_{x\to\pi} \cos x}{\lim\limits_{x\to\pi}(1+\cos^3 x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \tag{6f}$$

gdyż $1+\cos^3 x \geqslant 0$. To samo będzie się działo w każdym przypadku $x \to \pi + 2k\pi$. Proste $x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ są asymptotami pionowymi badanej funkcji

Pochodna:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\sin x(1+\cos^3 x) - \cos x \cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{(1+\cos^3 x)^2} \\ &= \frac{\sin x\left(2\cos^3 x - 1\right)}{(1+\cos^3 x)^2} \end{aligned} \tag{6g}$$

Mianownik (6g) jest nieujemny, zatem o znaku pochodnej decyduje znak licznika.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 0 && \text{(6h)}\\
\sin x \left(2\cos^3 x - 1\right) &= 0 && \text{(6i)}\\
\sin x &= 0 && \text{(6j)}
\end{aligned}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x - 1 &= 0 && \text{(6k)}\\
x &= \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 2k\pi && \text{(6l)}\\
&\simeq \pm 0.6539 + 2k\pi
\end{aligned}
$$

przy czym z warunkiem (6j) musimy uważać, gdyż część miejsc zerowych sinusa, mianowicie nieparzyste wielokrotności π, odpowiada punktom nieokreśloności funkcji.

Funkcja jest okresowa, więc możemy ją zbadać w dowolnym przedziale okresowości. Wybieramy przedział $(-\pi, \pi)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} g'(x) &= \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x\left(2\cos^3 x - 1\right)}{(1+\cos^3 x)^2} = -3\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{(1+\cos^3 x)^2} \\
&= -3\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{2(1+\cos^3 x)\cdot 3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\cos x\sin x(1+\cos^3 x)} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x(1+\cos^3 x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0^+\cdot 0^+} = -\infty
\end{aligned}
\tag{6m}
$$

gdzie po drodze wyłączaliśmy granice skończone i skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala. Postępując analogicznie stwierdzamy, że

$$\lim_{x \to -\pi^+} g'(x) = +\infty \tag{6n}$$

Mamy zatem

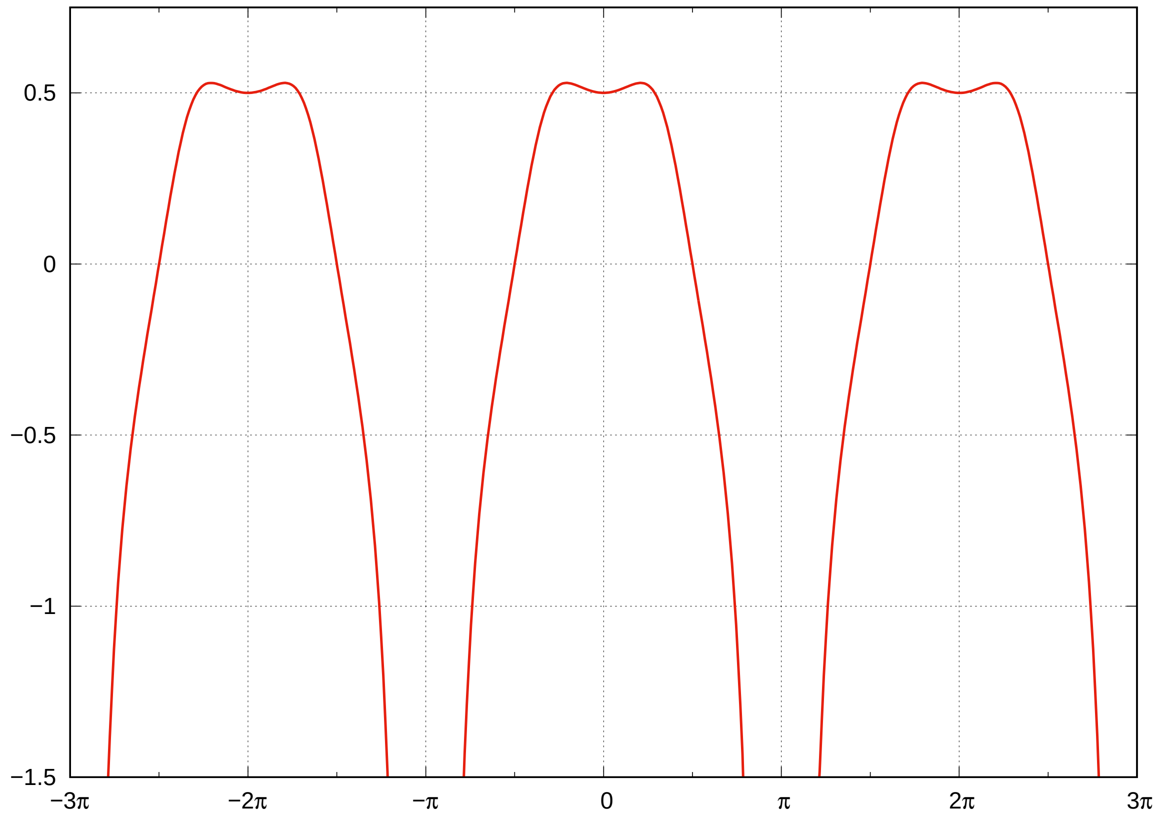
x	$\sin x$	$2\cos^3 x - 1$	$g'(x)$
$-\pi < x < -\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	$-$	$+$
$-\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	0	0
$-\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < 0$	$-$	$+$	$-$
0	0	$+$	0
$0 < x < \arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+$	$+$	$+$
$\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+$	0	0
$\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < \pi$	$+$	$-$	$-$

Zatem w punktach $x = \pm\mathrm{arc}\cos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ funkcja ma maksima, równe

$$g_{\mathrm{max}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \tag{6o}$$

W punkcie $x = 0$ funkcja ma minimum równe $g_{\mathrm{min}} = \frac{1}{2}$. Sytuacja powtarza się w każdym przedziale $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$.

Punktów przegięcia nie szukamy z uwagi na trudności obliczeniowe.



Funkcja (6a)