Fizyka dla firm — Matematyka

20. Reguła de l'Hospitala — kilka przykładów

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

19 grudnia 2022

Przykład 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos 2x}\right)}_{\text{wyr. skończone}=1} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{1}{4}\cdot 1 \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin x}{\cos x} = \dots \tag{2a}$$

Podstawmy $x-\pi/2=t$. Wówczas $x=t+\pi/2$, $\sin(t+\pi/2)=\cos t$, $\cos(t+\pi/2)=-\sin t$.

$$\dots = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{-\sin t} = -\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\right) = -1 \tag{2b}$$

Przykład 3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x + x\cos x}$$

$$=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=0 \tag{3}$$

Przykład 4

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\ln x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x \ln x\right) \tag{4a}$$

Obliczmy

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \tag{4b}$$

Wobec tego

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x \ln x\right) = 1 \tag{4c}$$

Przykład 5

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0 = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \tag{5a}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{5b}$$

Wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = e^0 = 1 \tag{5c}$$

Przykład 6

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \infty^0 = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\sin x \ln\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\exp(-\sin x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot(x\ln x)\right) = 1\,, \quad (6)$$

gdyż $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$, a jak pokazaliśmy w (4b), $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

Przykład 7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \tag{7a}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \tag{7b}$$

$\ln 1 = 0$, więc pod eksponentą mamy symbol nieoznaczony typu $\frac{0}{0}$.

Obliczmy

$$\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{\cos x(x\cos x) - \sin x(\cos x - x\sin x)}{x^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{x\cos^2 x + x\sin^2 x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \tag{7c}$$

$$\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{x\cos x}{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin x\cos x} \tag{7d}$$

Mamy zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{1} \tag{7e}$$

i znowu otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x\sin x\cos x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x+x\cos^2 x-x\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\sin x\cos x+x\cos^2 x-x\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos x}{2(\cos^2 x-\sin^2 x-2x\sin x\cos x)} = 0
\end{aligned}
\tag{7f}
$$

i ostatecznie

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) = e^0 = 1 \tag{7g}
$$

Przykład 8

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \tag{8a}$$

gdzie postąpiliśmy podobnie, jak w poprzednim przykładzie.

Nadal korzystając z poprzedniego przykładu obliczamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\sin x\cos x}=\frac{0}{0}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{-x^2\sin^2 x+x^2\cos^2 x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\cos x}=\frac{1}{3} \qquad \text{(8b)}$$

Ostatecznie

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\sin x}{x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x}\right) \\
&= e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \qquad (8c)
\end{aligned}
$$

Przykład 9

Nadal korzystamy z obliczeń wykonanych w poprzednich przykładach.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x^3} \ln \frac{\sin x}{x \cos x}\right) \tag{9a}$$

Postępujemy jak poprzednio i obliczamy

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x^3\sin x\cos x)'}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(x(\cos^2 x-\sin^2 x)+3\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x(x(\cos^2 x-\sin^2 x)+3\sin x\cos x)}\right)=\dots \quad (9b)$$

Przekształcając to wyrażenie otrzymujemy

$$\cdots = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x\left(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\to 1} + \underbrace{3\cos x}_{\to 3}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{6x} \tag{9c}$$

Niestety, ta ostatnia granica *nie istnieje*. W konsekwencji, nie istnieje też granica (9a).

Istnieją jednak granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{6x} = -\infty \tag{9d}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{6x} = \infty \tag{9e}$$

a zatem

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{6x}\right) = 0 \tag{9f}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{6x}\right) = \infty \tag{9g}$$

Przykład 10

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \tag{10a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1 \tag{10b}$$

Ostatecznie

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{10c}$$

(10c) to ważna granica, pojawiająca się w wielu obliczeniach.

Przykład 11

$$\lim_{x\to 4}(x-3)^{\frac{6}{4-x}} = \lim_{x\to 4}(1+x-4)^{\frac{-6}{x-4}} = \lim_{x\to 4}\left((1+x-4)^{\frac{1}{x-4}}\right)^{-6}$$
$$= \lim_{u\to 0}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6} = \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6} = e^{-6} \tag{11}$$

gdzie podstawiliśmy $x-4=u$ i skorzystaliśmy z (10c).