Fizyka dla firm — Matematyka

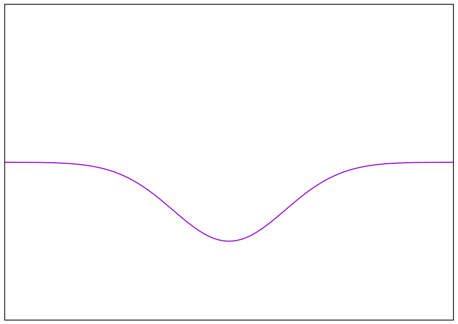
19. Minima i maksima

P. F. Góra
https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

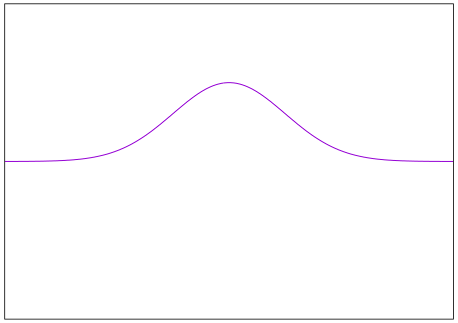
12 grudnia 2022

Ekstrema funkcji

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *minimum* w punkcie x_0, jeżeli jest w tym punkcie ciągła i istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $\forall x \in U : f(x) > f(x_0)$.



Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *maksimum* w punkcie x_0, jeżeli jest w tym punkcie ciągła i istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $\forall x \in U : f(x) < f(x_0)$.



Minima i maksima nazywamy łącznie *ekstremami* funkcji.

Ekstrema a znak pochodnej

W otoczeniu maksimum funkcja zmienia charakter swojego wzrostu: na lewo od maksimum funkcja rośnie, na prawo maleje. Jeśli funkcja jest różniczkowalna, oznacza to, że na lewo od maksimum pochodna jest dodatnia, na prawo — ujemna. Podobnie dzieje się w otoczeniu minimum: Jeśli funkcja jest różniczkowalna, na lewo od maksimum pochodna jest ujemna, na prawo — dodatnia. Widzimy, że w otoczeniu ekstremum pochodna funkcji różniczkowalnej zmienia znak.

Jest to możliwe, gdy zachodzi jedna z dwu sytuacji:

- Pochodna w ekstremum ma wartość zero, lub
- pochodna jest nieokreślona (nieciągła) w ekstremum — klasycznym przykładem jest funkcja $y = |x|$.

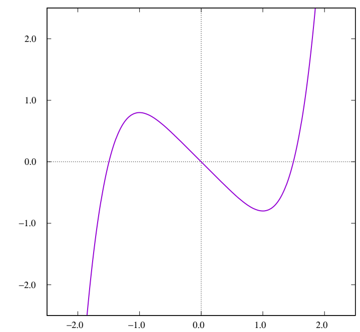
Płynie stąd następujący wniosek:

W celu znalezienia ekstremów — minimów i maksimów — funkcji, znajdujemy jej funkcję pochodną i znajdujemy punkty, w których funkcja jest ciągła, ale jej pochodna jest nieokreślona lub nieciągła, lub też — częściej — szukamy **miejsc zerowych pochodnej**.

Przykład 1

$$g(x) = \frac{1}{5}x^5 - x \qquad (1a)$$

$$g'(x) = x^4 - 1 \qquad (1b)$$



$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Funkcja może mieć ekstrema tylko w tych dwu punktach. Zauważmy, że $g'(x) > 0$ gdy $|x| > 1$, czyli gdy $x < -1$ lub $x > 1$. Gdy $-1 < x < 1$, $g'(x) < 0$. Rozpatrując zmianę znaku pochodnej — lub też zmianę monotoniczności funkcji — widzimy, że w punkcie $x = -1$ funkcja ma maksimum, a w punkcie $x = 1$ minimum.

Ekstrema a druga pochodna

Rozważmy funkcję $y = x^2$. Ma ona minimum w punkcie x=0, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $y'' = 2 > 0$.

Z kolei funkcja $z = -x^2$ ma maksimum w punkcie x=0, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $z'' = -2 < 0$.

Podobnie w przykładzie ze strony 5: Funkcja $g(x)$ ma maksimum w punkcie $x = -1$, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $g''(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4 < 0$. Podobnie, w punkcie x=1 funkcja $g(x)$ ma minimum, a jej druga pochodna wynosi $g''(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0$.

Niech funkcja $f(x)$ ma ekstremum w punkcie x_0. Skorzystajmy z rozwinięcia Taylora, zakładając, że funkcja jest dostatecznie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu x_0. Ponieważ w x_0 znajduje się ekstremum, $f'(x_0) = 0$, a zatem rozwinięcie Taylora do najniższego nieznikającego rzędu ma postać

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{2}$$

W otoczeniu ekstremum funkcja zachowuje się jak parabola.

- Jeżeli $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) > 0$, funkcja ma minimum.
- Jeżeli $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) < 0$, funkcja ma maksimum.

Gdy druga pochodna znika

Może się zdarzyć, że w pewnym punkcie znika i pierwsza, i druga pochodna. Wówczas o zachowaniu funckji w otoczeniu miejsca zerowego pierwszej pochodnej decyduje najniższy nieznikający rząd rozwinięcia Taylora.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ale $f^{(3)}(x_0) \neq 0$,

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{3}$$

i funkcja *nie ma* w punkcie x_0 ekstremum, gdyż niezależnie od znaku $f^{(3)}(x_0)$, po jednej stronie będą wartości mniejsze, niż $f(x_0)$, po drugiej zaś większe.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) = 0$, ale $f^{(4)}(x_0) \neq 0$

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \ldots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{4}$$

i funkcja *ma* w punkcie x_0 ekstremum. Jest to minimum, gdy $f^{(4)}(x_0) > 0$ lub maksimum, gdy $f^{(4)}(x_0) < 0$.

Wynik ten łatwo można uogólnić na przypadek, gdy pierwsza nieznikająca pochodna jest wyższego rzędu: Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i najniższa pochodna nieznikająca w x_0 jest rzędu nieparzystego, nie ma w tym punkcie ekstremum. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i najniższa pochodna nieznikająca w x_0 jest rzędu parzystego, w tym punkcie jest ekstremum. Jeśli najniższa nieznikająca pochodna jest rzędu parzystego, charakter ekstremum jest określoby przez jej znak. Jeżeli znak jest dodatni, jest minimum, jeżeli znak jest ujemny, mamy maksimum. Proszę sobie to porównać z funkcjami $y = x^3$, $y = x^4$.

Punkt przegięcia

Jak pamiętamy, druga pochodna określa wypukłość wykresu funkcji: Jeśli $f''(x) < 0$, wykres jest skierowany wypukłością do góry, jeśli $f''(x) > 0$, wykres jest skierowany wypukłością w dół. Zatem w punkcie, w którym druga pochodna znika

$$f''(x) = 0 \tag{5}$$

wypukłość wykresu zmienia się. Punkt taki nazywamy *punktem przegięcia*.

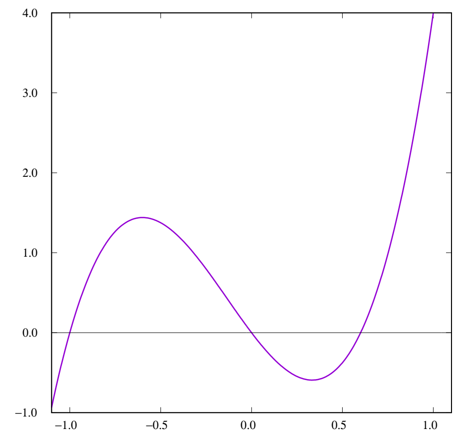
Zauważmy, że w ekstremach funkcji jej pochodna znika. Jeśli druga pochodna (pochodna pochodnej) funkcji jest ciągła na odcinku zawierającym dwa sąsiednie ekstrema, to na mocy twierdzenia Rolle'a musi istnieć punkt leżący pomiędzy ekstremami, w którym druga pochodna znika. Jeśli druga pochodna jest ciągła, pomiędzy sąsiednimi ekstremami musi znajdować się punkt przegięcia.

Przykład 2

Funkcja $y = x^3$, której druga pochodna wynosi $y'' = 6x$, ma punkt przegięcia w $x = 0$.

Przykład 3

$$
\begin{aligned}
y &= 5x^3 + 2x^2 - 3x && \text{(6a)}\\
y' &= 15x^2 + 4x - 3 && \text{(6b)}\\
y'' &= 30x + 4 && \text{(6c)}
\end{aligned}
$$



Funkcja ma punkt przegięcia gdy $30x + 4 = 0$, czyli w punkcie $x = -\frac{2}{15}$.

Asymptota funkcji

Jeśli funkcja jest ciągła przy $x \to \infty$ i jeśli istnieje prosta $y = mx + b$ taka, że

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0\,, \tag{7}$$

to prostą tę nazywamy asymptotą funkcji. Jeśli $m = 0$, asymptotę nazywamy poziomą, jeśli $m \neq 0$, asymptotę nazywamy ukośną.

Współczynniki asymptoty wyznaczamy z granic

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{8a}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) \tag{8b}$$

jeśli granice te istnieją.

Analogicznie definiujemy asymptotę przy $x \to -\infty$.

Przykład 4

Wyznaczmy asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} \tag{9}$$

Obliczam

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \right) \\
&= -1 && \text{(10a)} \\
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} - (-x) \right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2 && \text{(10b)}
\end{aligned}$$

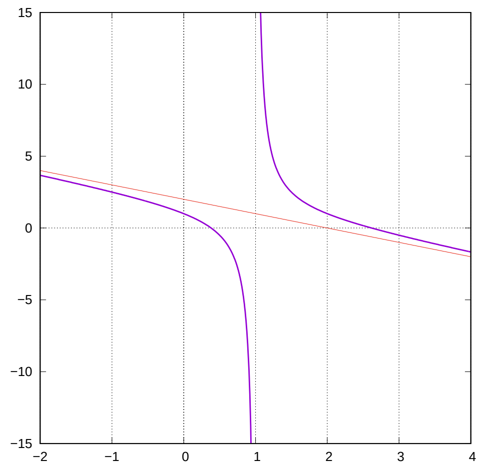
a więc prosta $y = -x + 2$ jest asymptotą ukośną funkcji (9) przy $x \to \infty$. Jak łatwo sprawdzić, ta sama prosta jest asymptotą ukośną tej funkcji przy $x \to -\infty$.

Przy okazji, punkt $x=1$ nie należy do dziedziny funkcji (9), a przy tym

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \tag{11a}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{11b}$$

Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową funkcji (9).



Badanie przebiegu zmienności funkcji

Badanie przebiegu zmienności funkcji obejmuje:

- Określenie dziedziny funkcji; jeżeli funkcja ma osobliwość usuwalną i można ją “uciąglić”, tak jak $\frac{\sin x}{x}$ w $x=0$, należy to zrobić
- Jeżeli funkcja jest okresowa, należy to podać, podając jej okres
- Jeżeli funkcja jest parzysta ($f(-x) = f(x)$) lub nieparzysta ($f(-x) = -f(x)$), należy to stwierdzić
- Zalezienie granic (lub granic jednostronnych) funkcji na krańcach dziedziny, tak jak $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- Znalezienie funkcji pochodnej
- Znalezienie miejsc zerowych funkcji pochodnej i sprawdzenie, czy odpowiadają one ekstremom funkcji, a jeśli tak, to czy są to minima, czy maksima; należy także podać wartość funkcji w ekstremach

- Podanie przedziałów monotoniczności funkcji
- Znalezienie punktów przegięcia funkcji; z tego punktu można niekiedy zrezygnować, jeśli jest to obliczeniowo uciążliwe
- Znalezienie asymptot ukośnych, jeżeli występują
- Opcjonalnie, naszkicowanie wykresu funkcji
- Niekiedy zaleca się także znalezienie miejsc zerowych funkcji — można od tego odstąpić, gdyż dodanie do funkcji stałej zmienia położenie miejsc zerowych, nie zmieniając innych charakterystyk wykresu funkcji ☺

Przykład 5

Znajdź ekstrema funkcji

$$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}\cos x \tag{12}$$

Jest to funkcja okresowa, o okresie 2π, parzysta. Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$\begin{aligned} f'(x) = -2\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin x &= 0 && \text{(13a)}\\ -4\sin x\cos x + \frac{1}{2}\sin x &= 0 && \text{(13b)}\\ \sin x\left(\cos x - \frac{1}{8}\right) &= 0 && \text{(13c)} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że albo $\sin x = 0$, czyli $x = k\pi$, albo też $x = \arccos\frac{1}{8} + 2k\pi$, $x = -\arccos\frac{1}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\arccos\frac{1}{8} \simeq 1.4455$.

W celu ustalenia co jest minimum, co maksimum, badamy znak drugiej pochodnej:

$$f''(x) = -4\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) \tag{14}$$

Zauważmy, że

$$\cos\left(\pm\arccos\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \tag{15a}$$

$$\cos\left(\pm 2\arccos\frac{1}{8}\right) = \cos\left(2\arccos\frac{1}{8}\right) = 2\left(\cos\left(\arccos\frac{1}{8}\right)\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32} \tag{15b}$$

Wobec tego

$$f''(k\pi) = -4\cos(2k\pi) + \frac{1}{2}\cos(k\pi) = -4 \pm \frac{1}{2} < 0 \tag{16a}$$

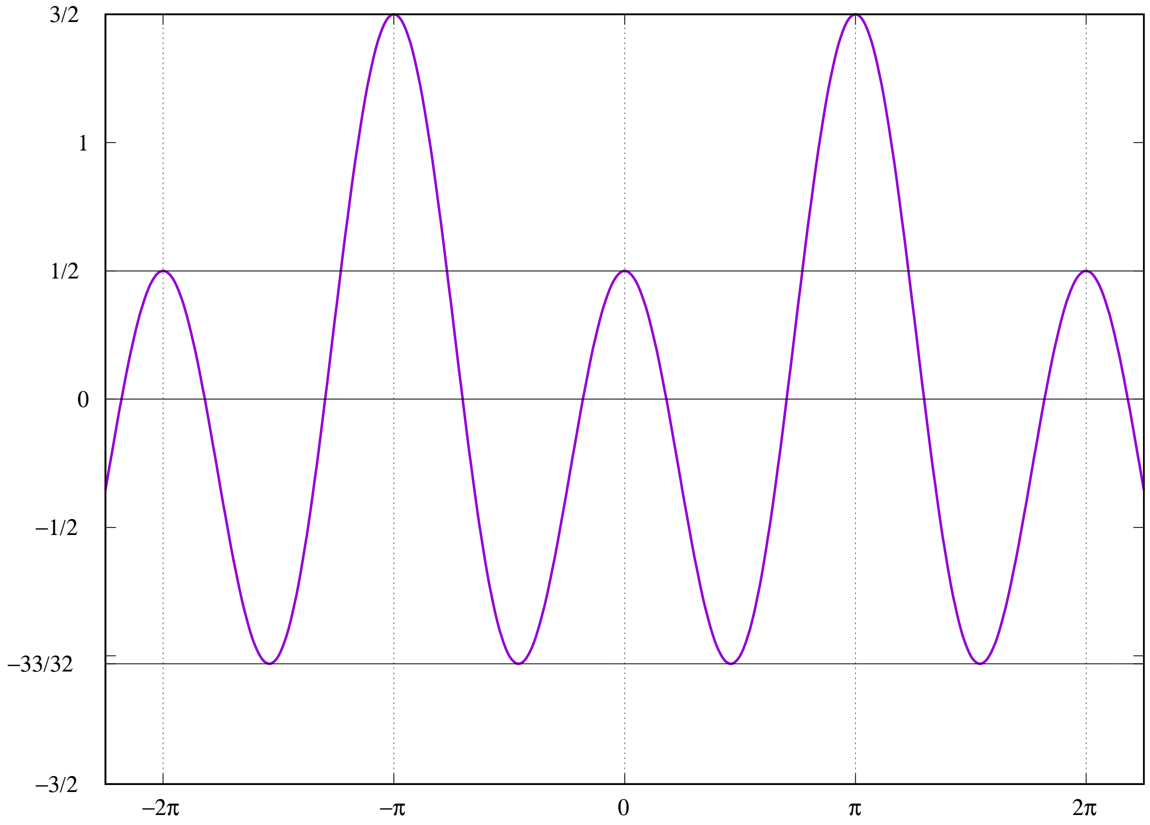
$$f''\left(\pm\arccos\frac{1}{8}\right) = -4\cdot\left(-\frac{31}{32}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{63}{16} > 0 \tag{16b}$$

A zatem funkcja osiąga minima w punktach $\pm\arccos\frac{1}{8} + 2k\pi$ i maksima w punktach $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$f_{\text{min}} = f\left(\pm\arccos\frac{1}{8}\right) = -\frac{31}{32} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{33}{32} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{max}_1} &= f((2k+1)\pi) = \cos((4k+2)\pi) - \frac{1}{2}\cos((2k+1)\pi) \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{17b}$$

$$f_{\text{max}_2} = f(2k\pi) = \cos(4k\pi) - \frac{1}{2}\cos(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{17c}$$


3/2
1
1/2
0
−1/2
−33/32
−3/2
−2π
−π
0
π
2π

Przykład 6

Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x \tag{18}$$

Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}$. Granice funkcji w $\pm\infty$ wynoszą

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{16x^2} + \frac{1}{8x^3}\right)\right) = +\infty \tag{19}$$

Funkcja ta może mieć ekstrema w punktach, w których znika jej pochodna:

$$f'(x) = x^3 - \frac{9}{8}x + \frac{1}{8} = 0\,. \tag{20}$$

Łatwo widzimy, że $x = 1$ jest pierwiastkiem tego równania. Dzieląc wielomian $x^3 - \frac{9}{8}x + 1$ przez $x-1$ otrzymujemy

$$x^3 - \frac{9}{8}x + 1 = (x-1)\left(x^2 + x - \frac{1}{8}\right) = 0 \tag{21}$$

a więc pozostałe dwa miejsca zerowe pierwszej pochodnej są równe $\frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{6})$. Potencjalne ekstrema funkcji (18) odpowiadają miejscom zerowym jej pochodnej.

Aby ustalić, czy są to minima, czy maksima, sprawdźmy drugą pochodną:

$$f''(x) = 3x^2 - \frac{9}{8} \tag{22a}$$

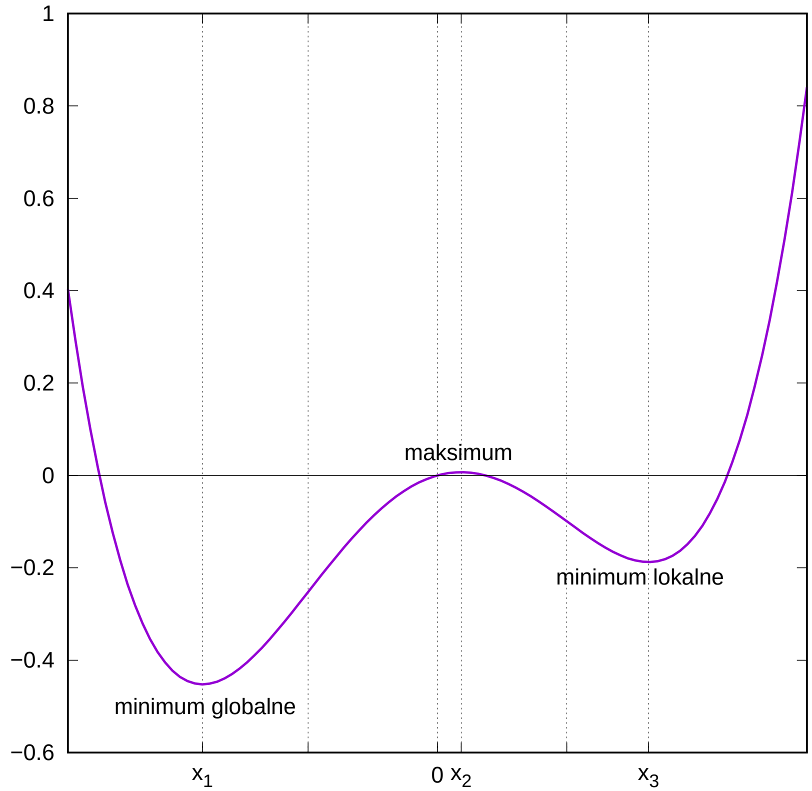
$$
\begin{aligned}
f''\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{4}\right) &= \frac{3}{4}(1+\sqrt{6}) > 0 && \text{(22b)}\\
f''\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{4}\right) &= \frac{3}{4}(1-\sqrt{6}) < 0 && \text{(22c)}\\
f''(1) &= \frac{15}{8} > 0 && \text{(22d)}
\end{aligned}
$$

Konkludując, funkcja (18) ma następujące ekstrema:

- minimum w punkcie $x_1 = \frac{1}{4}(-2-\sqrt{6})$, równe $-\frac{3}{256}(8\sqrt{6}+19)$
- maksimum w punkcie $x_2 = \frac{1}{4}(-2+\sqrt{6})$, równe $\frac{3}{256}(8\sqrt{6}-19)$
- minimum w punkcie $x_3 = 1$, równe $-\frac{3}{16}$

Funkcja maleje od $-\infty$ do x_1, rośnie od x_1 do x_2, maleje od x_2 do x_3 i rośnie od x_3 do $+\infty$.

Możemy wreszcie wyznaczyć punkty przegięcia: Z warunku zerowania się drugiej pochodnej (22a) widzimy, że punktami przegięcia są $\pm\frac{1}{4}\sqrt{6}$.



Wykres funkcji $\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$

Minima lokalne, minima globalne

Minimum, jakie funkcja (18) osiąga w punkcie x_3, nazywam minimum lokalnym: jest to minimum, ale funkcja gdzieś poza otoczeniem tego minimum przybiera wartości mniejsze, niż wartość w tym minimum. Dana funkcja może mieć wiele minimów lokalnych.

Minimum, jakie funkcja (18) osiąga w punkcie x_1, nazywam minimum globalnym: jest to minimum i funkcja nigdzie nie osiąga wartości mniejszych, niż wartość w tym minimum. **Uwaga:** Minimum globalne nie musi istnieć (na przykład gdy funkcja ucieka do $-\infty$ gdzieś poza obszarem zawierającym minima lokalne)!

Analogicznie wprowadza się pojęcia maksimum lokalnego i maksimum globalnego.

Przykład 7

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$w(x) = \frac{x^3 + 2}{2x} \tag{23}$$

Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}/\{0\}$. Granice wynoszą

$$\lim_{x\to\pm\infty} w(x) = +\infty \tag{24a}$$

$$\lim_{x\to 0^-} w(x) = -\infty \tag{24b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} w(x) = +\infty \tag{24c}$$

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową badanej funkcji.

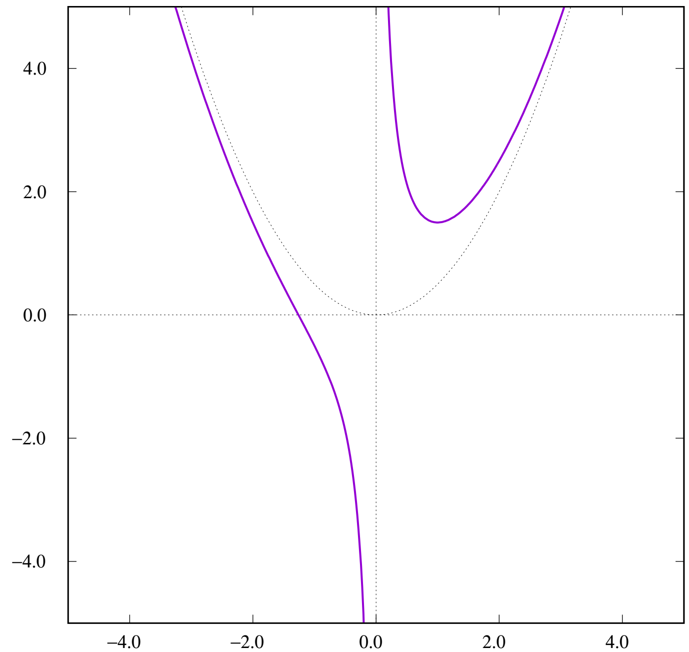
$$w'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} \tag{25}$$

Pochodna jest nieokreślona w $x{=}0$, poza tym $w'(x) < 0$ dla $x < 1, x \neq 0$ i $w'(x) > 0$ dla $x > 1$. $w'(1) = 0$ i jest to jedyne miejsce zerowe pochodnej.

$$w''(x) = 1 + \frac{2}{x^3}\,. \tag{26}$$

Druga pochodna jest nieokreślona w $x{=}0$, a jej miejscem zerowym jest $x = -\sqrt[3]{2}$. $w''(1) = 3 > 0$.

Funkcja maleje od $-\infty$ do 0^- i od 0^+ do 1, rośnie od 1 do $+\infty$. Funkcja osiąga minimum dla $x{=}1$, a wartość minimum wynosi $g_{\text{min}} = \frac{3}{2}$. Jest to minimum lokalne, a funkcja nie posiada minimum globalnego. Nie ma asymptot poziomych ani ukośnych. Jedyny punkt przegięcia leży w punkcie $x = -\sqrt[3]{2}$.



Wykres funkcji $w(x) = \frac{x^3+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$. Dla $x \to \pm\infty$ wykres asymptotycznie zbliża się do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.

Przykład 8

Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \tag{27}$$

Funkcja ta jest nieokreślona w punktach, w których nie jest określony $\operatorname{tg} x$, czyli dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Natomiast

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \tag{28}$$

wobec czego funkcję (27) można "uciąglić", przyjmując $f(0) = 1$. Ostatecznie dziedziną funkcji jest zbiór $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$. Funkcja jest parzysta. Granice w $\pm\infty$ nie istnieją. Natomiast dla $k \geqslant 0$,

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = +\infty \tag{29a}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\infty \tag{29b}$$

Z parzystości funkcji (27) wynika, że jej wykres po stronie ujemnych argumentów jest lustrzanym odbiciem wykresu po stronie dodatniej, a więc dla $k > 0$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = +\infty \tag{29c}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\infty \tag{29d}$$

Proste $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ są asymptotami pionowymi.

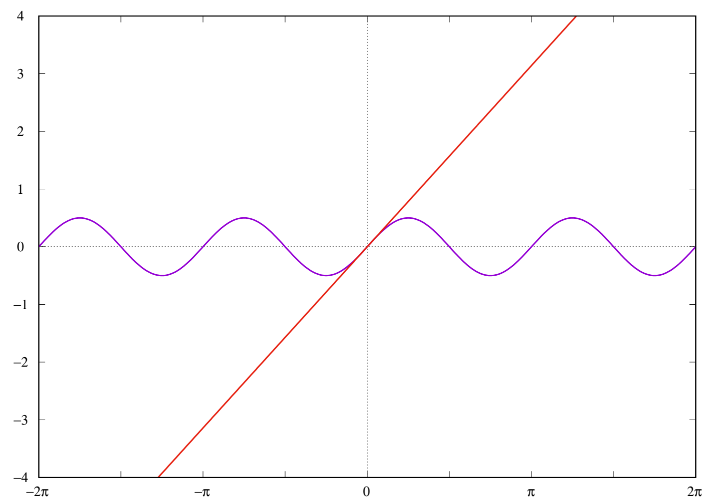
Obliczmy pochodną funkcji (27).

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)\cdot x\cos x - \sin x\cdot(\cos x - x\sin x)}{x^2\cos^2 x}$$
$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \tag{30}$$

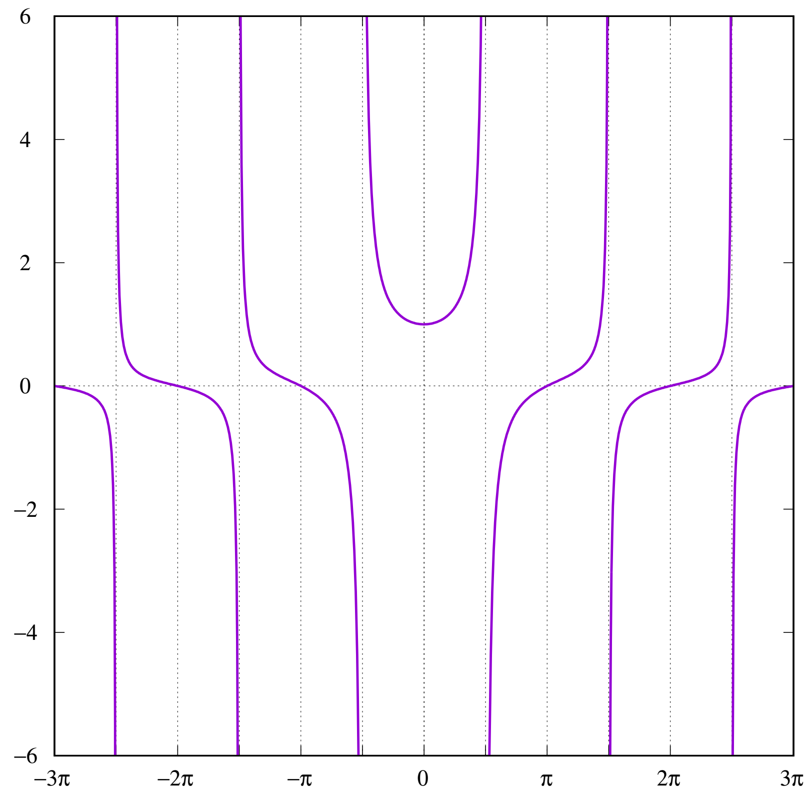
Dla $x{=}0$ otrzymujemy symbol nieoznaczony, musimy więc obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\right)}_{=1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$
$$= \left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = 0 \tag{31}$$

“Uciąglając” pochodną w zerze, możemy stwierdzić, że $f'(0) = 0$.



O znaku pochodnej (30) decyduje znak licznika. Jest on ujemny dla $x < 0$ i dodatni dla $x > 0$. Widzimy, że funkcja (27) jest przedziałami malejąca dla $x < 0$ i przedziałami rosnąca dla $x > 0$. W x=0 funkcja osiąga minimum, którego wartość wynosi 1. Nie szukamy punktów przegięcia z uwagi na skomplikowaną postać drugiej pochodnej.



Wykres funkcji $\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}$