

Fizyka dla firm — Matematyka

16. Granica funkcji

Ciągłość

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

1 grudnia 2022

Granica funkcji

Pojęcie granicy funkcji jest centralne dla całej analizy matematycznej.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma granicę w punkcie x_0 i wynosi ona g , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \quad (1)$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \quad (2)$$

Kolejność kwantyfikatorów jest ważna! To jest “dobieranie delty do epsilon” 😊, nie na odwrót. Gdy czytamy “dla każdego ε ”, odruchowo myślimy o dużych wartościach. Tymczasem w pojęciu granicy chodzi o dowolnie *małe*, ale nieujemne wartości ε .

Granice niewłaściwe i w punktach niewłaściwych

Mówimy, że granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A) \quad (3)$$

Mówimy, że granicą funkcji $f(x)$ w nieskończoności jest liczba g , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \quad (4)$$

W tym wypadku δ ma być duże ☺.

Podobnie definiujemy granice w minus nieskończoności, granice nieskończone w nieskończoności itd.

Przykłady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = \frac{1 + 1}{1 + 3} = \frac{1}{2} \quad (5a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{\infty + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty}} = \infty \quad (5b)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-\infty + \frac{1}{-\infty}}{1 + \frac{3}{-\infty}} = -\infty \quad (5c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad (5d)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (5e)$$

Granice jednostronne

Niech x_0 będzie jakąś liczbą i niech $f(x)$ będzie określona w pewnym prawostronnym otoczeniu tego punktu. Mówimy, że funkcja posiada granicę prawostronną w tym punkcie, równą g , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \quad (6)$$

Zapisujemy ten fakt jako

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \quad (7)$$

Zapis $x \rightarrow x_0^+$ rozumiemy jako “ x dąży do x_0 , ale jest stale większe od x_0 ”.

Podobnie definiuje się granicę lewostronną (notacja: $x \rightarrow x_0^-$) oraz niewłaściwe granice jednostronne.

W ogólności granica funkcji w punkcie/w nieskończoności nie musi istnieć. Warunkiem koniecznym (i wystarczającym) istnienia granicy w punkcie skończonym jest to, aby obie granice jednostronne istniały i były sobie równe.

Przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad (8)$$

Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ *nie istnieje*.

Przykład

Rozpatrzmy funkcję schodkową Heaviside'a:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = 1, \quad (10)$$

natomiast $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ nie istnieje.

Uwaga: Funkcja schodkowa (9) nie jest określona dla $x = 0$. Niekiedy przyjmuje się $\theta(0) = 1/2$, nie zmienia to jednak podanych wyżej własności granic.

Własności granic

Założmy, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ istnieją. Wówczas istnieją granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \quad (11a)$$

i podobnie dla granic

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) \quad (11b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (11c)$$

i podobnie dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$. **Należy jednak uważać na możliwość pojawienie się symboli nieoznaczonych!**

Przykład

Granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (12a)$$

jest symbolem nieoznaczonym typu $\infty - \infty$. Możemy jednak to wyrażenie przekształcić:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \quad (12b) \end{aligned}$$

...ale

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x} \right) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \infty\end{aligned}\tag{13}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x_0 zachodzi

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad (14a)$$

i granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G \quad (14b)$$

istnieją i są sobie równe, to granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G \quad (14c)$$

Podobnie dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnąca i ograniczona od góry przy $x \rightarrow \infty$, to istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad (15)$$

i granica ta jest większa od wszystkich wartości, jakie przybiera funkcja dla $x \gg A > 0$. Podobnie dla funkcji malejącej i ograniczonej od dołu.

Przykład

Rozpatrzmy funkcję

$$r(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (16)$$

Funkcja $r(x)$ jest ściśle rosnąca dla $x > 0$ i ograniczona od góry; ograniczeniem jest liczba 1, a funkcja *dla żadnej skończonej wartości argumentu* nie osiąga tej wartości. Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest, że granica $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x)$ istnieje; nietrudno wykazać, że $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 1$.

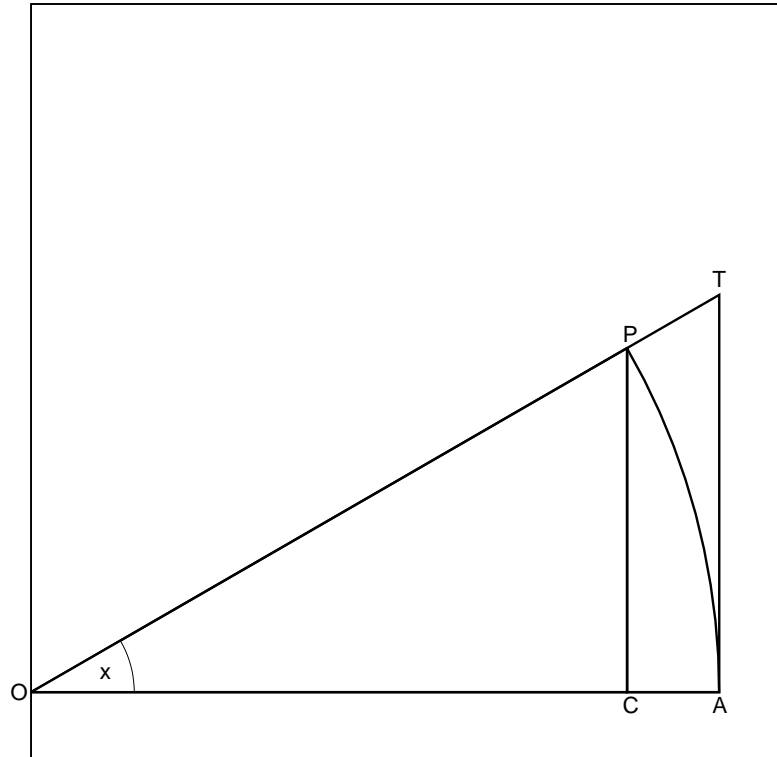
Granica $\frac{\sin x}{x}$

Rozpatrzmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (17)$$

Gdybyśmy chcieli skorzystać z “ilorazu granic”, napotkamy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Musimy do tego podejść w inny sposób. Ponieważ funkcja jest parzysta, wystarczy przeanalizować przypadek $x > 0$. Rozpatrzmy rysunek (następna strona)

Pole trójkąta $\triangle OPA$ jest mniejsze od pola wycinka kołowego OPA , które jest mniejsze od pola trójkąta $\triangle OTA$. Wysokość $\triangle OPA$ wynosi $r \sin x$ a jego podstawa r , wysokość $\triangle OTA$ wynosi $r \operatorname{tg} x$, podstawa także r , zatem



$$0 < \frac{1}{2}r^2 \sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg} x \quad (18a)$$

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (18b)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad (18c)$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad (18d)$$

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x \quad (18e)$$

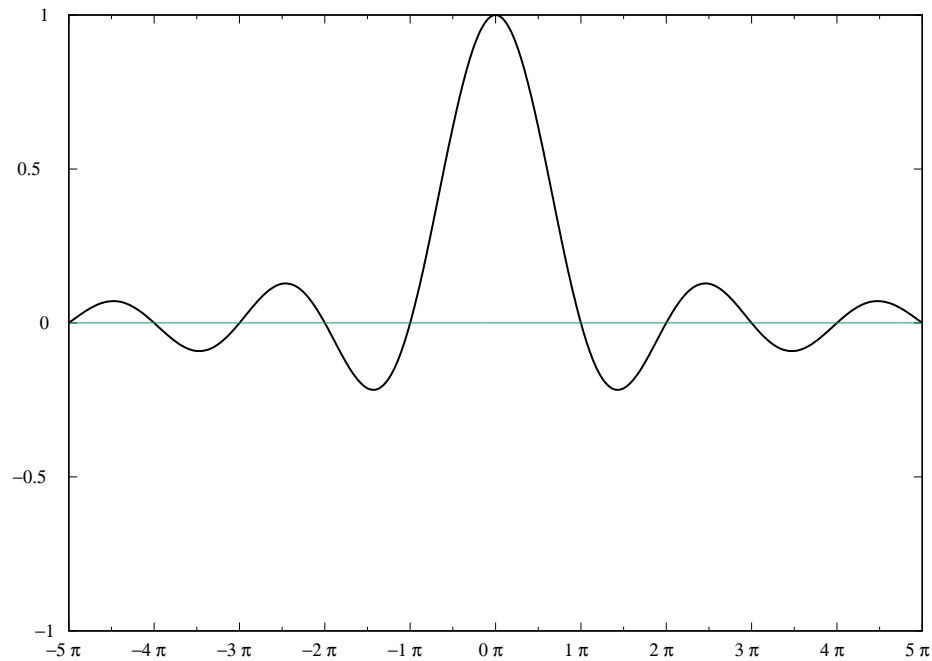
$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad (18f)$$

Ponieważ $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2) < 2 \sin(x/2) < 2 \cdot x/2 = x$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \quad (18g)$$

Granica funkcji stałej 0 wynosi 0, granica funkcji x przy $x \rightarrow 0^+$ wynosi 0,

więc granica wyrażenia $1 - \frac{\sin x}{x}$ też musi być 0, skąd wynika (17).



Funkcja $\frac{\sin x}{x}$

Inne ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} P_1(x) = 0 \quad (20)$$

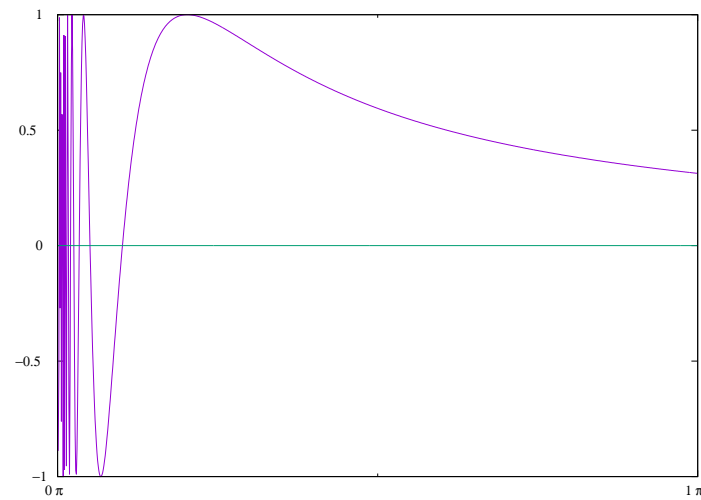
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x P_2(x) = 0 \quad (21)$$

gdzie $P_1(x)$, $P_2(x)$ są *dowolnymi* wielomianami.

Granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (22)$$

nie istnieje.



Ciągłość funkcji

Ciągłość jest jedną z najważniejszych cech, którą *mogą* posiadać funkcje. Mówimy, że funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej $f(x)$ jest ciągła w punkcie c należącym do dziedziny tej funkcji, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (23)$$

Alternatywnie,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : (|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon) \quad (24)$$

Definicje (23) i (24) są równoważne.

Pojęcie ciągłości można uogólnić na przypadek zespolony, na przypadki wielowymiarowe i na ogólne odwzorowania w przestrzeniach topologicznych.

Funkcja **nie jest** ciągła, w szczególności gdy

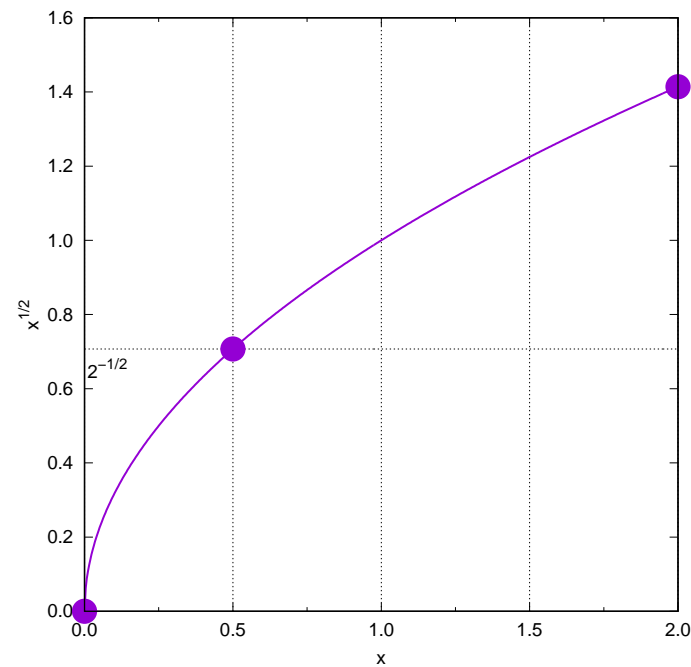
- punkt c nie należy do dziedziny
- granica w (23) nie istnieje, gdyż
 - funkcja wykonuje skok
 - funkcja jest osobliwa w otoczeniu punktu c
 - zachowanie funkcji w otoczeniu tego punktu jest niemożliwe do określenia

Mówiąc niezbyt precyzyjnie, dla funkcji jednej zmiennej **ciągłość** oznacza, że *można narysować wykres funkcji bez odrywania ołówka od papieru.*

Własności funkcji ciągłych

- Funkcja ciągła przeprowadza przedział domknięty na przedział domknięty, otwarty na otwarty.
- Jeżeli funkcja ciągła jest odwracalna, to jej funkcja odwrotna także jest ciągła.
- Jeżeli funkcje $f(x)$, $g(x)$ są ciągłe w jakimś punkcie, to także funkcje $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $\text{const} \cdot f(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ oraz $f(x)/g(x)$ są ciągłe w tym punkcie; to ostatnie pod warunkiem, że $g(x) \neq 0$
- Jeżeli funkcje $f(x)$, $g(x)$ są ciągłe, to funkcja złożona $f(g(x))$ jest ciągła (np. funkcja $\sin(x^2)$ jest ciągła).

Twierdzenie o wartości średniej: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale **domkniętym** $[a, b]$, to istnieje $\tilde{x} \in [a, b] : f(\tilde{x}) = (f(a) + f(b))/2$.



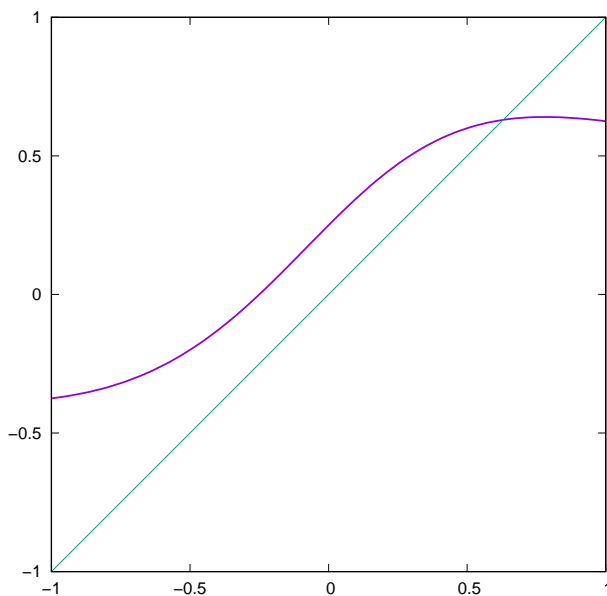
Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale **domkniętym** $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $\tilde{x} \in [a, b] : f(\tilde{x}) = 0$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale **domkniętym** $[a, b]$, to osiąga swój kres górny i dolny na tym przedziale.

Można powiedzieć, że funkcje ciągłe na przedziale **domkniętym** zachowują się “porządnie”: Przybierają wszystkie wartości z zakresu wyznaczonego przez zakres w punktach skrajnych. Mogą wychodzić poza ten zakres, ale nie są na tym przedziale rozbieżne ani nieokreślone.

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym: Jeżeli funkcja ciągła przeprowadza pewien przedział **domknięty** w siebie, $f:[a, b] \rightarrow [a, b]$, to ma w tym przedziale **punkt stały**:

$$\exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \bar{x} \quad (25)$$



Wykres funkcji $(x + 1/4)/(x^2 + 1)$

“Uciąganie” funkcji w punkcie

Niekiedy wzór (przepis na obliczanie) na funkcję nie pozwala wyliczyć jej wartości w pewnym punkcie. Jeśli jednak istnieje granica funkcji w tym punkcie i jest skończona, możemy funkcję “uciąglić”, przypisując jej w tym (pozornie) osobliwym punkcie wartość równą granicy.

Przykłady

$$w(x) = \frac{x^2}{x} \longrightarrow w(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (26a)$$

$$v(x) = \frac{\sin x}{x} \longrightarrow v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (26b)$$

Przykład

Rozpatrzmy bardziej skomplikowany przykład. Dana jest funkcja

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \quad (27)$$

Funkcja jest nieciągła w punkcie $x = 1$, gdyż otrzymujemy tam symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Rozpatrzmy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(y + 1))}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y + \pi)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y) \cos \pi + \cos(\pi y) \sin \pi}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y)}{y} \\ &= -\pi \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = -\pi \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = -\pi \end{aligned} \quad (28)$$

gdź ostatnia granica równa się 1. (Po drodze użyliśmy podstawień $y = x - 1$, $z = \pi y = \pi(x - 1)$.)

Możemy więc zmodyfikować definicję funkcji (27):

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ -\pi & x = 1 \end{cases} \quad (29)$$

Ta funkcja jest ciągła, a jej wykres przedstawia poniższy rysunek:

