Fizyka dla firm — Matematyka

15. Iloczyn wektorowy

Układy współrzędnych

Krzywe stożkowe

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

28 listopada 2022

I. Iloczyn wektorowy

Dla wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiuje się iloczyn wektorowy $\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, jako (pseudo)wektor o składowych:

$$L_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \,, \tag{1}$$

gdzie ϵ_{ijk} jest *tensorem zupełnie antysymetrycznym*, zwanym także *symbolem Levi-Civity*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i,j,k \text{ tworzą parzystą permutację liczb 1,2,3} \\ -1 & \text{jeżeli } i,j,k \text{ tworzą nieparzystą permutację liczb 1,2,3} \\ 0 & \text{gdy którekolwiek wskaźniki powtarzają się} \end{cases} \tag{2}$$

Można to łatwo rozwinąć:

$$L_1 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k = \sum_{j,k=2}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k$$

gdyż gdyby $j = 1$ lub $k = 1$, symbol Levi-Civity $\epsilon_{1..} = 0$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned} \tag{3a}$$

gdyż $\epsilon_{122} = \epsilon_{133} = 0$.

Podobnie

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{2jk} a_j b_k = \sum_{j,k \in \{1,3\}} \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ &= \epsilon_{211} a_1 b_1 + \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{233} a_3 b_3 \\ &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned} \tag{3b}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{3jk} a_j b_k = \sum_{j,k=1}^{2} \epsilon_{3jk} a_j b_k \\
&= \epsilon_{311} a_1 b_1 + \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 + \epsilon_{322} a_2 b_2 \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}
\tag{3c}
$$

$$
\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = L_1 \mathrm{e}_1 + L_2 \mathrm{e}_2 + L_3 \mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \tag{3d}
$$

gdzie $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ są kolejnymi wersorami osi układu współrzędnych.

Można to zapisać w postaci mniej “eleganckiej”, ale niekiedy bardziej użytecznej:

$$\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Przykład

Niech $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$. Wówczas

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Własności iloczynu wektorowego

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \tag{6}$$

Widać to najłatwiej z wyrażenia (4): zamiana kolejności wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ odpowiada zamienieniu miejscami drugiego i trzeciego wiersza wyznacznika, a to powoduje zmianę znaku wyznacznika.

Iloczyn wektorowy jest prostopadły do tworzących go wektorów. Istotnie,

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{k=1}^{3} b_k \left(\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i a_j \right) = 0\,, \tag{7}$$

co wynika z tego, że gdy rozpatrujemy podwójną sumę w nawiasie, przy każdej ustalonej wartości wskaźnika k każdej kombinacji ijk musi towarzyszyć kombinacja jik, przy której symbol Levi-Civity zmienia znak. To powoduje, że cała podwójna suma w nawiasie znika.

Podobnie dowodzimy, że $\mathbf{b} \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. A zatem iloczyn wektorowy jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Wartość iloczynu wektorowego

Ponieważ długość wektora nie zależy od wyboru układu współrzędnych, wybierzmy taki, w którym będzie najprościej obliczyć, a przynajmniej zinterpretować, wartość (długość wektora) iloczynu wektorowego.

Jak widzieliśmy, iloczyn wektorowy jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez wektory go tworzące. Wybierzmy więc taki układ współrzędnych, w którym wektory te rozpinają płaszczyznę XY*. Ich składowe wynoszą w tym układzie współrzędnych $[a_1, a_2, 0]$, $[b_1, b_2, 0]$, zaś iloczyn

*Dwa wektory niewspółliniowe rozpinają płaszczyznę. Tę płaszczyznę, rozpinaną przez dane nam wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ uznajemy za płaszczyznę XY układu współrzędnych.

wektorowy, zgodnie ze wzorem (4),

$$\mathbf{L} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{8}$$

$$\|\mathbf{L}\| = |a_1b_2 - a_2b_1| \tag{9}$$

a wektor $\mathbf{L}$ jest skierowany wzdłuż osi OZ, czyli jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Niech te dwa wektory tworzą, odpowiednio, kąty α_1, α_2 z osią OX. Składowe wektorów są rzutami tych wektorów na osie układu współrzędnych, czyli

$$a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos\alpha_1\,, \quad a_2 = \|\mathbf{a}\| \sin\alpha_1\,, \tag{10a}$$

$$b_1 = \|\mathbf{b}\| \cos\alpha_2\,, \quad b_2 = \|\mathbf{b}\| \sin\alpha_2\,, \tag{10b}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Podstawiamy (10) do (9), otrzymując

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{L}\| &= |(\|\mathbf{a}\|\cos\alpha_1)(\|\mathbf{b}\|\sin\alpha_2) - (\|\mathbf{a}\|\sin\alpha_1)(\|\mathbf{b}\|\cos\alpha_2)| \\
&= \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot|\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2| \\
&= \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot|\sin(\alpha_1-\alpha_2)| \qquad (11)
\end{aligned}$$

Miarą kąta między wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ w wybranym układzie współrzędnych jest $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$. Ponieważ jednak *kąt między wektorami nie zależy od wyboru układu współrzędnych*, jak widzimy, używana przez nas definicja iloczynu wektorowego jest zgodna z definicją "szkolną".

Przykład

Ile wynosi kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$?

Wiemy już, że $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [1, -1, 2]$. Wobec tego $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{6}$. Jednocześnie $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{5}$. Wobec tego, zgodnie ze wzorem (11),

$$|\sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \tag{12a}$$

Nawiasem mówiąc, ten sam wniosek uzyskalibyśmy korzystając z iloczynu skalarnego:

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} \tag{12b}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

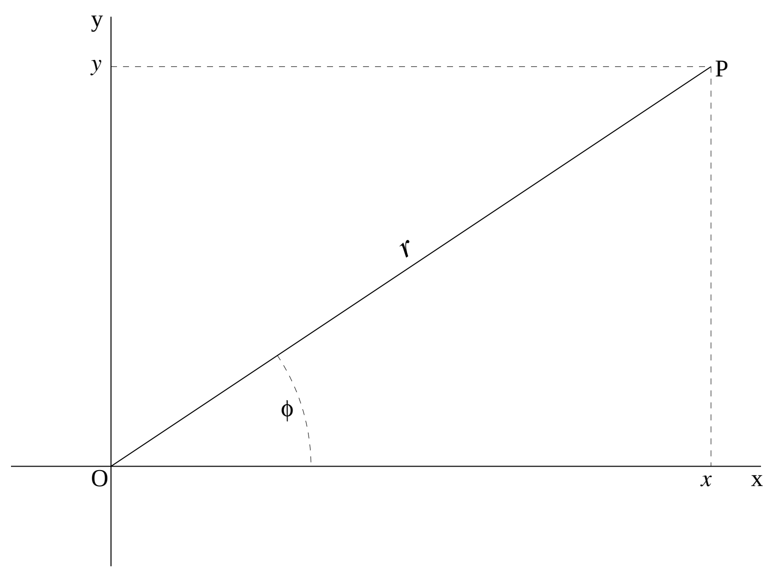
II. Układ kartezjański płaski

Układ kartezjański na płaszczyźnie składa się z dwu osi, przecinających się w punkcie O pod kątem prostym. Punkt O nazywamy “początkiem” lub “środkiem” układu współrzędnych. Ustalamy, która oś jest “pierwsza”, która “druga”. Tradycyjnie oznaczamy je OX, OY. Każdy punkt płaszczyzny można jednoznacznie określić podając jego rzuty prostokątne na obie osie. Punkt, którego rzuty na obie osie wynoszą, odpowiednio, x, y, oznaczamy $P(x, y)$. Liczby x, y, nazywane współrzędnymi kartezjańskimi, mogą przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste, $x, y \in \mathbb{R}$. Punkty płaszczyzny można zatem utożsamiać z uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych.

Punkt płaszczyzny można także utożsamiać z wektorem zaczepionym w początku układu współrzędnych, zakończonym zaś w danym punkcie. Wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu.

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Osie układu kartezjańskiego dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, numerowane od prawego górnego rogu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Układ kartezjański płaski i układ biegunowy.

Układ biegunowy

Alternatywą dla układu kartezjańskiego płaskiego jest układ biegunowy. Zamiast podawać współrzędne kartezjańskie, podajemy odległość punktu od środka układu współrzędnych, r ($r \geqslant 0$), oraz kąt ϕ, jaki wektor wodzący punktu tworzy z osią OX. Kąt mierzymy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a biegunowymi tego samego punktu jest dany przez

$$x = r\cos\phi \tag{13a}$$

$$y = r\sin\phi \tag{13b}$$

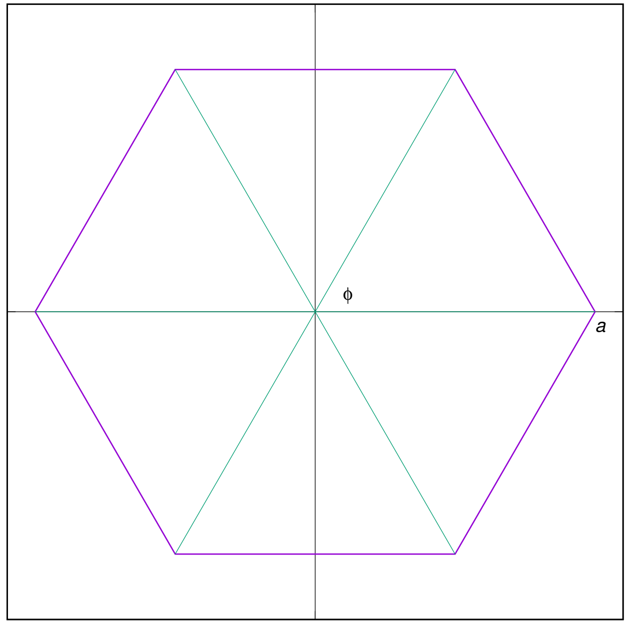
Przykład

W kartezjańskim układzie współrzędnych umieszczono sześciokąt foremny o boku a w ten sposób, że środek układu współrzędnych jest środkiem sześciokąta, a jeden wierzchołek leży na dodatniej półosi osi OX. Jakie są współrzędne kartezjańskie i biegunowe wierzchołków sześciokąta?

Pierwszy wierzchołek leży na osi OX. Drugi wierzchołek tworzy z osią OX kąt ϕ. Z symetrii, trzeci wierzchołek tworzy kąt 2ϕ i tak dalej. Mamy $6\phi = 2\pi$, czyli $\phi = \pi/3$. Zatem w sposób oczywisty współrzędne biegunowe wierzchołków sześciokąta wynoszą

$$\left(a, k\frac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,. \tag{14}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

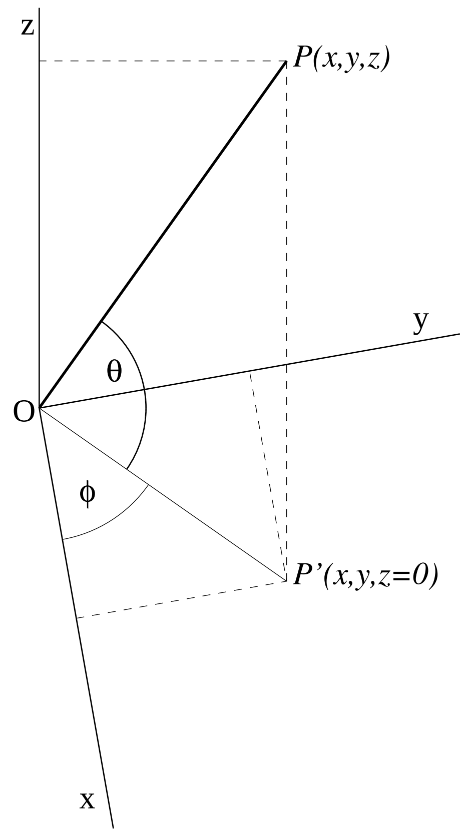


Współrzędne kartezjańskie wierzchołków wyliczamy według wzorów (13), podstawiając kolejno kąty (14). Otrzymujemy kolejno $(a, 0)$, $(a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a, 0)$, $(-a/2, -a\sqrt{3}/2)$, $(a/2, -a\sqrt{3}/2)$.

Trójwymiarowy układ kartezjański

Układ kartezjański trójwymiarowy składa się z trzech wzajemnie prostopadłych osi, przecinających się w jednym punkcie, zwanym "początkiem" lub "środkiem" układu współrzędnych. Każdy punkt przestrzeni możemy jednoznacznie określić podając jego trzy rzuty prostokątne na kolejne osie. Jeżeli punkt ma współrzędne $P(x, y, z)$, jego rzut na płaszczyznę XY ma współrzędne $(x, y, 0)$; można go wówczas utożsamiać z punktem płaszczyzny o współrzędnych $P'(x, y)$.

Wektor o początku w początku układu współrzędnych i końcu w danym punkcie nazywamy *wektorem wodzącym* punktu. Punkt można utożsamiać z jego wektorem wodzącym.



Układ kartezjański trójwymiarowy i układ sferyczny.

Układ sferyczny

Alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych sferycznych. Położenie punktu określamy wówczas podając jego odległość od środka układu współrzędnych, r ($r \geqslant 0$) oraz dwa kąty. W wyborze tych kątów jest pewna dowolność — my przyjmujemy, że są to θ, kąt, jaki tworzy wektor wodzący punktu z płaszczyzną XY, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, oraz ϕ, kąt, jaki tworzy rzut wektora wodzącego punktu na płaszczyznę XY, z osią OX, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. W tej konwencji związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi punktu dany jest przez

$$x = r \cos\theta \cos\phi \tag{15a}$$
$$y = r \cos\theta \sin\phi \tag{15b}$$
$$z = r \sin\theta \tag{15c}$$

Układ walcowy Inną alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych walcowych, zwany także układem cylindrycznym. Jest to, mówiąc obrazowo, uzupełnienie współrzędnych biegunowych o “wysokość” punktu ponad płaszczyznę XY, czyli o współrzędną z:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi && (16a)\\ y &= r\sin\phi && (16b)\\ z &= z && (16c) \end{aligned}$$

Który układ współrzędnych przestrzennych — kartezjański, sferyczny czy walcowy — wybrać? Ten, w którym najwygodniej będzie prowadzić analizę danego nam problemu ☺

Układ eliptyczny

Niekiedy używa się także innych krzywoliniowych układów współrzędnych. Stosunkowo często stosowany jest układ eliptyczny, będący uogólnieniem układu biegunowego (13):

$$x = a\,r\cos\phi \tag{17a}$$

$$y = b\,r\sin\phi \tag{17b}$$

Współrzędnymi są (r, ϕ), $r \geqslant 0$. Wielkości $a \neq 0$, $b \neq 0$ są parametrami. Dla $a = b = 1$ otrzymujemy układ biegunowy, dla $a = b \neq 1$ układ biegunowy z przeskalowanym promieniem. Dla $a \neq b$ krzywa $r = \text{const}$ jest elipsą.

Uogólnienie układu cylindrycznego jest oczywiste.

III. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jak już wspominaliśmy, równanie prostej na płaszczyźnie ma ogólną postać

$$Ax + By + C = 0 \tag{18}$$

przy czym liczby A, B nie mogą *jednocześnie* być równe zeru. Równanie to nosi nazwę równania kierunkowego prostej. Wektor $[B, -A]$ jest równoległy do tej prostej i jest nazywany *wektorem kierunkowym prostej*. Wektor $[A, B]$ jest prostopadły do prostej.

Równanie prostej w przestrzeni

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ najwygodniej jest podać równanie prostej w postaci parametrycznej. Mianowicie, rozpatrujemy pewien wektor $\mathbf{v} \neq 0$, o składowych $[v_x, v_y, v_z]$. Wówczas równania

$$x = x_0 + v_x t \tag{19a}$$

$$y = y_0 + v_y t \tag{19b}$$

$$z = z_0 + v_z t\,, \tag{19c}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, opisują prostą przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległą do wektora $\mathbf{v}$.

Równanie płaszczyzny

Ogólne równanie płaszczyzny ma postać

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{20}$$

przy czym liczby A, B, C nie mogą być *jednocześnie* równe zeru.

Przyjmijmy, że żadna z liczb A, B, C, D nie jest równa zeru (przypadki szczególne można rozpatrzyć osobno). Wówczas łatwo sprawdzić, że punkty $P_1 = (-D/A, 0, 0)$, $P_2 = (0, -D/B, 0)$, $P_3 = (0, 0, -D/C)$ leżą na płaszczyźnie (20). Naszym celem jest wyznaczenie wektora prostopadłego (normalnego) do płaszczyzny (20). Skoro wektor ma być prostopadły do płaszczyzny, musi być prostopadły do dowolnych wektorów leżących na płaszczyźnie. Weźmy wektory $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = [D/A, -D/B, 0]$

oraz $\mathbf{w} = \vec{P_1P_3} = [D/A, 0, -D/C]$. Oznaczmy poszukiwany wektor $\mathbf{n} = [p, q, r]$. Z warunków $\mathbf{n} \circ \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{n} \circ \mathbf{w} = 0$ otrzymujemy

$$\frac{D}{A}p - \frac{D}{B}q = 0 \tag{21a}$$

$$\frac{D}{A}p - \frac{D}{C}r = 0 \tag{21b}$$

Układ równań (21) nie ma jednoznacznego rozwiązania, ale natychmiast widać, że wektor $\mathbf{n} = [A, B, C]$ spełnia go, a zatem jest to wektor prostopadły do płaszczyzny (20).

Można to także rozwiązać w inny sposób. Wiemy, że iloczyn wektorowy jest prostopadły do obu swoich czynników. Możemy obliczyć

$$
\begin{aligned}
\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{D}{A} & -\frac{D}{B} & 0 \\ \frac{D}{A} & 0 & -\frac{D}{C} \end{vmatrix} = \frac{D^2}{BC}\mathbf{e}_1 + \frac{D^2}{AC}\mathbf{e}_2 + \frac{D^2}{AB}\mathbf{e}_3 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{D^2}{BC} \\ \frac{D^2}{AC} \\ \frac{D^2}{AB} \end{bmatrix} = \frac{D^2}{ABC} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

a więc także otrzymujemy wektor proporcjonalny do $\mathbf{n} = [A, B, C]$ jako wektor prostopadły do płaszczyzny (20)

Inną wygodną formą równania płaszczyzny jest *równanie odcinkowe*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \tag{23}$$

Postać ta ma tę zaletę, że od razu widać, że punkty $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ należą do płaszczyzny zadanej przez równanie (23), co więcej, są to punkty, w których płaszczyzna przecina osie układu współrzędnych.

Przykład

Znajdź równanie płaszczyzny rozpiętej przez wektory swobodne $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$ i zawierającej punkt $(0, 0, 1)$.

Ponieważ

$$\mathbf{n} = \text{const} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{const} \cdot [1, -1, 2] \tag{24a}$$

jest, jako iloczyn wektorowy $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$, prostopadły do obu tych wektorów, musi być wektorem normalnym poszukiwanej płaszczyzny. Ma ona zatem równanie

$$x - y + 2z + D = 0 \tag{24b}$$

Pozostaje wyznaczyć współczynnik D. Ponieważ punkt $(0, 0, 1)$ ma spełniać równanie (24b), $D = -2$ i poszukiwane równanie płaszczyzny ma postać

$$x - y + 2z - 2 = 0 \tag{24c}$$

Powierzchnia stożkowa

Wyobraźmy sobie dwie proste, przecinające się pod kątem α, $0<\alpha<\pi/2$. Jedna z tych prostych obraca się wokół drugiej o pełny kąt, zakreślając *powierzchnię stożkową*. Powierzchnia stożkowa jest nachylona do osi obrotu (osi symetrii) o kąt α (patrzymy się na kąt leżący wewnątrz powierzchni stożkowej).

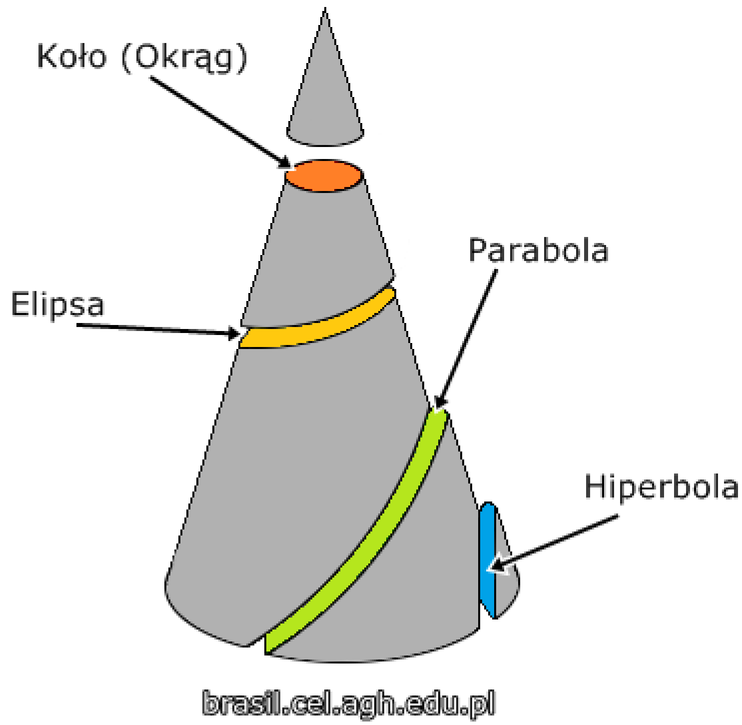
Krzywe stożkowe

Jeśli powierzchnię stożkową przetniemy płaszczyzną, na przekroju otrzymamy *krzywe stożkowe*. Wynikiem przekroju może być:

- **okrąg**, jeśli płaszczyzna cięcia jest prostopadła do osi symetrii powierzchni stożkowej
- **elipsa**, jeśli płaszczyzna cięcia jest nachylona do osi symetrii powierzchni stożkowej pod kątem mniejszym, niż $\pi/2$, ale większym, niż α
- **parabola**, jeśli płaszczyzna cięcia jest nachylona pod kątem α
- **hiperbola**, jeśli płaszczyzna cięcia jest nachylona pod kątem mniejszym, niż α.

Innymi możliwymi przekrojami są punkt, prosta lub para prostych, które możemy traktować jako zdegenerowane przypadki, odpowiednio, elipsy bądź okręgu, paraboli i hiperboli.

Copyright © 2020-22 P. F. Góra



Takie są historyczne, starożytne (!) definicje krzywych stożkowych. My jednak będziemy rozpatrywać krzywe stożkowe jako miejsca geometryczne punktów spełniających odpowiednie warunki na płaszczyźnie.

Równanie okręgu

Okrąg to miejsce geometryczne punktów równoodległych od pewnego punktu, zwanego środkiem okręgu. Z samej definicji odległości wynika równanie okręgu:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{25}$$

gdzie (x_0, y_0) oznaczają położenie środka okręgu, $r \geqslant 0$ jego promień.

Pole powierzchni okręgu wynosi $S = \pi r^2$, a długość okręgu $L = 2\pi r$.

Jeżeli środek okręgu pokrywa się ze środkiem układu współrzędnych ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), równanie okręgu redukuje się do znanej postaci

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{26}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

We współrzędnych biegunowych równanie okręgu w postaci (26) jest niezwykle proste: $r = \text{const}$, natomiast równanie w postaci parametrycznej ma postać

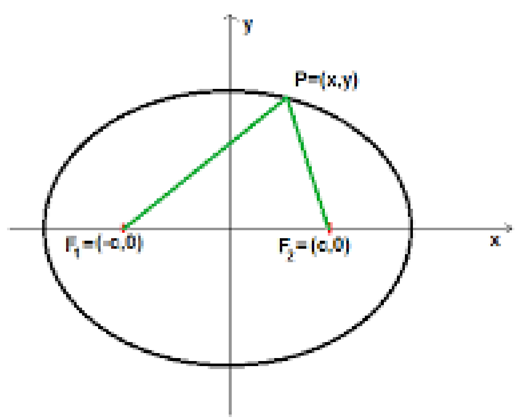
$$x = r\cos t \tag{27a}$$

$$y = r\sin t \tag{27b}$$

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Elipsa

Wszystkie punkty leżące na okręgu są równoodległe od jednego punktu: środka okręgu. Rozważmy teraz zbiór punktów, których suma odległości od dwóch wybranych punktów jest stała. Punkty te nazywamy *ogniskami*. Dobierzmy układ współrzędnych tak, aby interesujące nas punkty miały współrzędne $(-c, 0)$, $(c, 0)$. Niech suma odległości wynosi $2a$; z geometrii widać, że $a > c$.



Liczymy (poziome linie oddzielają poszczególne równania dla lepszej widoczności):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{28a}$$

$$\begin{split} x^2+2xc+c^2+y^2+x^2-2xc+c^2+y^2 \\ +2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=4a^2 \end{split} \tag{28b}$$

$$\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=2a^2-(x^2+y^2+c^2) \tag{28c}$$

$$\begin{split} x^4+2x^2y^2+y^4-2c^2x^2+2c^2y^2+c^4 \\ =x^4+2x^2y^2+y^4 \\ +c^4-4c^2a^2+2c^2x^2+2c^2y^2+4a^4-4a^2x^2-4a^2y^2 \end{split} \tag{28d}$$

$$-4c^2x^2+4a^2x^2+4a^2y^2=4a^4-4a^2c^2 \tag{28e}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^4 - a^2c^2}x^2 + \frac{a^2}{a^4 - a^2c^2}y^2 = 1 \tag{28f}$$

Oznaczając $a^2 - c^2 = b^2 > 0$, otrzymujemy równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{29}$$

Dla $a^2 = b^2 = r^2$ równanie to redukuje się do równania okręgu.

Jeśli środkiem elipsy nie jest środek układu współrzędnych, tylko punkt (x_0, y_0), przy czym ogniska leżą na prostej równoległej do osi OX, to równanie (29) można łatwo uogólnić:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{30}$$

Mimośród

Widzimy, że $c^2 = a^2 - b^2$; $\pm c$ oznacza położenia ognisk elipsy na osi OX. Wielokość

$$e = \frac{c}{a} \tag{31}$$

nazywamy mimośrodem (ang. *eccenticity*) elipsy. Zachodzi $0 \leqslant e \leqslant 1$. Taka elipsa jest “szersza niż wyższa” ☺. Dla $e = 0$ elipsa staje się okręgiem. Dla $e \to 1$ elipsa nigdy się nie zamyka i dąży do paraboli.

Liczby a, b oznaczają, odpowiednio, większą i mniejszą półoś elipsy.

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

“Pochylona” elipsa

Jak wygląda równanie elipsy, której prosta łącząca ogniska — alternatywnie: której większa półoś — jest nachylona pod kątem θ do osi OX? Trzeba obrócić wszystkie punkty o kąt θ (co jest równoważne obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\theta$). Ponieważ wiemy, jak wygląda macierz obrotu płaskiego, widzimy, że nowe współrzędne będą się równać

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{32}$$

My chcemy wyrazić stare współrzędne przez nowe. Ponieważ macierz obrotu jest ortogonalna, z łatwością znajdujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{33}$$

skąd $x = x' \cos\theta + y' \sin\theta$, $y = -x' \sin\theta + y' \cos\theta$. Podstawiamy te wyrażenia do równania (29) i znajdujemy

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) {x'}^2 + 2\sin\theta\cos\theta \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x'y' + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right) {y'}^2 = 1 \tag{34}$$

Zauważmy, że dla $\theta = \pi/2$ ($\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$) równanie to przybiera postać

$$\frac{{x'}^2}{b^2} + \frac{{y'}^2}{a^2} = 1 \tag{35}$$

czyli większa i mniejsza półoś zamieniły się miejscami; elipsa jest teraz “wyższa niż szersza”, a ogniska leżą w punktach $(0, \pm c)$.

Gdyby środek elipsy był przesunięty, współrzędne środka także należałoby poddać obrotowi.

Inne postacie równania elipsy

Wracamy do kanonicznej postaci równania (29). Równanie w postaci parametrycznej przybiera postać

$$x = a\cos t \tag{36a}$$
$$y = b\sin t \tag{36b}$$

gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Z kolei w układzie biegunowym równanie elipsy ma postać

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi} \tag{37}$$

Pole powierzchni elipsy wynosi $S = \pi ab$, natomiast długości obwodu elipsy nie da się wyrazić przez skończoną kombinację funkcji elementarnych.

Parabola

We współrzędnych kartezjańskich parabola o pionowej osi symetrii ma równanie

$$y = ax^2 + bx + c \tag{38a}$$

Analogicznie, parabola o poziomej osi symetrii ma równanie

$$x = ay^2 + by + c \tag{38b}$$

Parabole “pochylone” uzyskujemy dokonując obrotu okładu współrzędnych, jak w (33).

Zwróćmy uwagę, że w wyrażeniach (38) jedna zmienna jest w potędze pierwszej, druga zaś w drugiej (i pierwszej, ale to można by zlikwidować odpowiednio przesuwając układ współrzędnych).

Równania parametryczne paraboli mają postać (zmienną parametryczną jest t)

$$
\begin{aligned}
x &= 2pt + h \qquad (39a)\\
y &= pt^2 + k \qquad (39b)
\end{aligned}
$$

“Leżąca” parabola o równaniu $y^2 = 2px$ ma we współrzędnych biegunowych równanie

$$r = 2p\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}\,,\ \pi \in [-\pi/2, \pi/2] \qquad (40)$$

Hiperbola

Hiperbola to zbiór punktów, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości tych punktów od dwóch ustalonych punktów, nazywanych ogniskami hiperboli, jest stała. Jeśli układ współrzędnych wybierzemy w ten sposób, aby ogniska leżały w punktach $(-c, 0)$, $(c, 0)$, musi zachodzić

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \tag{41}$$

Wykonując obliczenia podobne, jak dla elipsy, uzyskujemy równanie hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{42}$$

gdzie $b^2 = c^2 - a^2$.

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Zwróćmy uwagę, że hiperbola, w przeciwieństwie do pozostałych krzywych stożkowych, ma *dwie* gałęzie. Dla $|x| \gg 1$, czyli dla bardzo dużych wartości $|x|$, hiperbola w postaci kanonicznej, danej przez (42), zbliża się do dwóch prostych, zwanych asymptotami hiperboli:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{43}$$

Równanie parametryczne hiperboli ma postać

$$x = \pm a \cosh t \tag{44a}$$
$$y = b \sinh t \tag{44b}$$

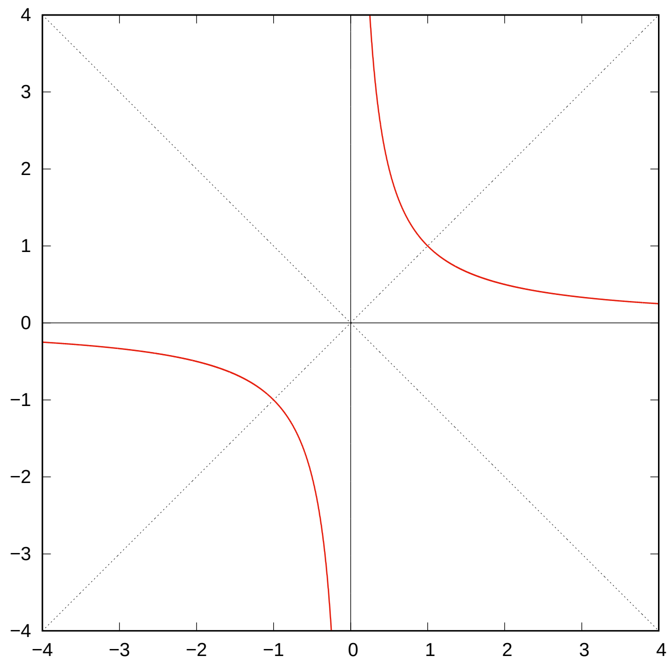
Wybór znaku odpowiada za wybór gałęzi hiperboli.

Dokonując obrotu, możemy z (42) uzyskać równanie "nachylonej" hiperboli. Podobnie jak poprzednio można też przesunąć hiperbolę tak, aby jej środek nie leżał w środku układu współrzędnych.

Copyright © 2020-22 P. F. Góra

Wykres $1/x$

Podczas nauki matematyki studenci najczęściej mają do czynienia z hiperbolą będącą wykresem funkcji $y = 1/x$. Asymptotami są proste $y = 0$ oraz $x = 0$.



Chociaż kształt wykresu nie budzi wątpliwości, czy to na pewno jest hiperbola? Ponieważ $y = 1/x$ i $x \neq 0$, $xy = 1$. Obróćmy układ współrzędnych o kąt $\pi/4$, co odpowiada obrotowi wykresu o kąt $-\pi/4$.

$$\begin{aligned} x &= (x' - y')/\sqrt{2} && \text{(45a)} \\ y &= (x' + y')/\sqrt{2}, && \text{(45b)} \end{aligned}$$

a więc

$$xy = 1 \Leftrightarrow \frac{{x'}^2}{2} - \frac{{y'}^2}{2} = 1, \tag{45c}$$

co odpowiada kanonicznej postaci hiperboli.