Fizyka dla firm — Matematyka

13. Macierze ortogonalne

Wektory i wartości własne macierzy

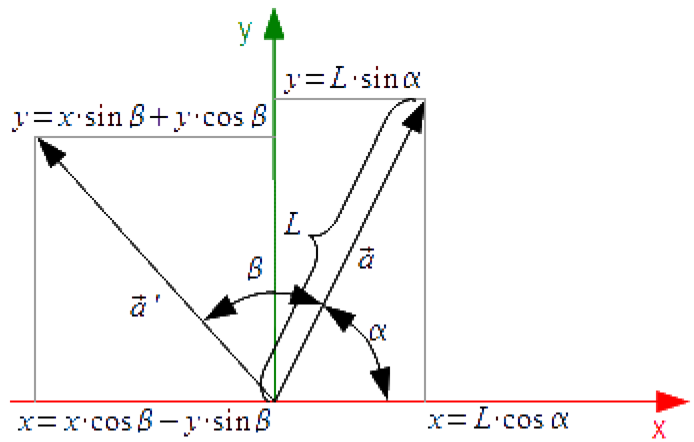
Macierze symetryczne, rzeczywiste

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

21 listopada 2022

Obrót wektora na płaszczyźnie



Dany jest pewien wektor na płaszczyźnie, o współrzędnych $[x, y]$. Chcemy go obrócić o kąt β. Nowe (po obrocie) współrzędne oznaczymy $[x', y']$. Jak je obliczyć?

Z rysunku widać, że obrócony wektor tworzy z osią OX kąt $\alpha+\beta$, zatem

$$
\begin{aligned}
x' &= L\cos(\alpha+\beta) = L\cos\alpha\cos\beta - L\sin\alpha\sin\beta \\
&= x\cos\beta - y\sin\beta && \text{(1a)} \\
y' &= L\sin(\alpha+\beta) = L\sin\alpha\cos\beta + L\cos\alpha\sin\beta \\
&= y\cos\beta + x\sin\beta && \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

gdyż $x = L\cos\beta$, $y = L\sin\beta$. Wyrażenia (1) możemy zapisać macierzowo

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}
$$

Macierz występującą we wzorze (2) nazywam macierzą obrotu płaskiego. Oznaczmy ją $\mathbf{O}$.

Własności macierzy obrotu

$$\det \mathbf{O} = \begin{vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos^2\beta - (-\sin^2\beta) = 1 \tag{3}$$

Gdybyśmy chcieli obrócić wektor o kąt $-\beta$, to z parzystości funkcji trygonometrycznych od razu widzimy, że macierzą obrotu byłaby macierz

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \mathbf{O}^T \tag{4}$$

Intuicja podpowiada nam, że obrót najpierw o kąt β, a potem o kąt $-\beta$ łącznie powinny się znosić, czyli dawać transformację tożsamościową. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\mathbf{O}\mathbf{O}^T &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & \cos\beta\sin\beta - \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta - \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta + \cos^2\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \end{aligned} \tag{5}$$

i podobnie $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbb{I}$. Widzimy, że macierz obrotu posiada *własność ortogonalności*:

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbb{I} \tag{6}$$

Obroty w 3D

Obrót w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można przedstawić jako złożenie obrotów w trzech płaszczyznach o określone kąty (kąty Eulera):

Obrót wokół osi x w płaszczyźnie yz:

$$\mathbf{O}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{7a}$$

Obrót wokół osi y w płaszczyźnie xz:

$$\mathbf{O}_y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{7b}$$

Obrót wokół osi z w płaszczyźnie xy:

$$\mathbf{O}_z = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7c}$$

Każda z tych macierzy ma własność ortogonalności: $\mathbf{O}_x^T\mathbf{O}_x = \mathbb{I}$, $\mathbf{O}_y^T\mathbf{O}_y = \mathbb{I}$, $\mathbf{O}_z^T\mathbf{O}_z = \mathbb{I}$. Podobnie — ich złożenia. Na przykład $(\mathbf{O}_x\mathbf{O}_y\mathbf{O}_z)^T\mathbf{O}_x\mathbf{O}_y\mathbf{O}_z = \mathbf{O}_z^T\mathbf{O}_y^T\mathbf{O}_x^T\mathbf{O}_x\mathbf{O}_y\mathbf{O}_z = \mathbf{O}_z^T\mathbf{O}_y^T\mathbf{O}_y\mathbf{O}_z = \mathbf{O}_z^T\mathbf{O}_z = \mathbb{I}$.

Macierze ortogonalne

Uogólniając obroty w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, macierzami ortogonalnymi nazywam macierze, dla których

$$\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbb{I}\,. \tag{8}$$

Nie tylko obroty

Nie tylko macierze obrotu spełniają własność (8). Własność tę posiadają także macierze odbicia, na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

— ta macierz zmiania znak drugiej składowej wektora — oraz macierze permutacji, na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

— ta macierz permutuje drugą i trzecią składową wektora.

Własności macierzy ortogonalnych

$\mathbf{O}$ oznacza macierz ortogonalną.

1. $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$.
2. $\det \mathbf{O} = \pm 1$. Istotnie, $1 = \det \mathbb{I} = \det\left(\mathbf{O}^T\mathbf{O}\right) = \left(\det \mathbf{O}^T\right)(\det \mathbf{O}) = (\det \mathbf{O})^2$.
3. Macierze ortogonalne w $\mathbb{R}^n$ tworzą grupę. Działaniem grupowym jest mnożenie macierzy.
4. Kolumny macierzy ortogonalnej są unormowane i wzajemnie prostopadłe. Kolumny macierzy ortogonalnej tworzą bazę w $\mathbb{R}^n$.
5. Wyrażenie $\mathbf{v}' = \mathbf{O}\mathbf{v}$ można interpretować jako przedstawienie wektora $\mathbf{v}$ w bazie kolumn macierzy $\mathbf{O}$.
6. Ortogonalna *transformację podobieństwa* $\mathbf{A}' = \mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O}$ można interpretować jako przedstawienie elementów operatora $\mathbf{A}$ w bazie kolumn macierzy $\mathbf{O}$.

7. Macierz ortogonalna zachowuje euklidesowy iloczyn skalarny. Istotnie,
$(\mathbf{Ou}) \circ (\mathbf{Ov}) = (\mathbf{Ou})^T (\mathbf{Ou}) = \mathbf{u}^T \mathbf{O}^T \mathbf{O} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \circ \mathbf{v}.$

Zagadnienie własne

Definicja: Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywam *wartością własną macierzy* $\mathbf{A}$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ taki, że

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\,. \tag{11}$$

Wektor $\mathbf{x}$ nazywam wówczas *wektorem własnym macierzy* $\mathbf{A}$ *do wartości własnej* λ.

Definicja jest sformułowana dla macierzy zespolonych, my jednak — poza przypadkiem macierzy hermitowskich — będziemy zajmować się macierzami rzeczywistymi. Należy jednak pamiętać, że także macierze rzeczywiste (niesymetryczne) mogą mieć zespolone wartości własne.

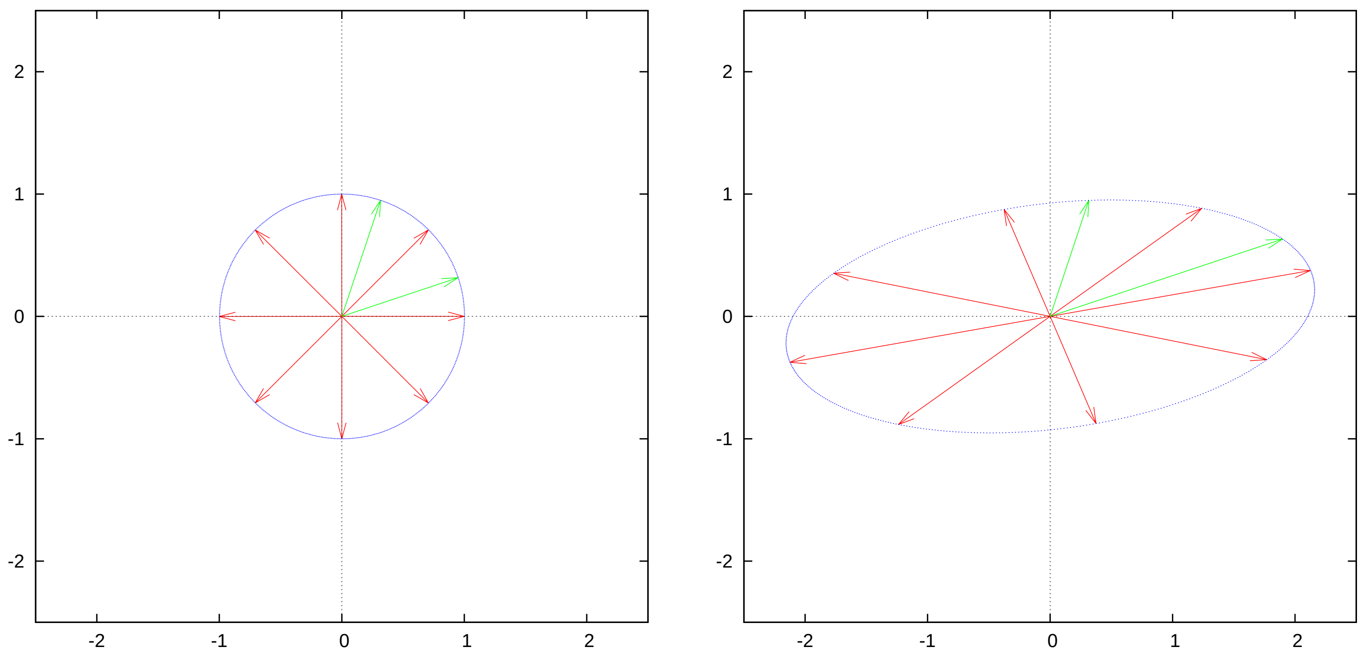
Problem poszukiwania wartości własnych macierzy nazywa się *zagadnieniem własnym*.

Przykład

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Jej unormowanymi wektorami własnymi są $\left[\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right]^T$, $\left[\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right]^T$, a odpowiadającymi im wartościami własnymi liczby $1, 2$. Rysunek na następnej stronie przedstawia rodzinę wektorów jednostkowych (lewy panel) oraz tę samą rodzinę przekształconą przez macierz (12). Wektory własne zaznaczone są na zielono.



Rodzina wektorów jednostkowych przekształconych przez macierz (12). Wektory własne tej macierzy zaznaczone są na zielono. Jeden z nich, odpowiadający wartości własnej 1, nie zmienia się, drugi, odpowiadający wartości własnej 2, zachowuje kierunek, ale jego długość rośnie dwukrotnie.

Równanie charakterystyczne

Równanie (11) można zapisać w postaci

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\,\mathbf{x} = 0\,. \tag{13}$$

Jeżeli λ jest wartością własną, równanie to musi mieć niezerowe rozwiązanie ze względu na $\mathbf{x}$. Jest to możliwe tylko w wypadku

$$\det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0\,. \tag{14}$$

Równanie (14) nazywane jest *równaniem charakterystycznym macierzy* $\mathbf{A}$. Jest to równanie wielomianowe stopnia n. Widzimy, że każda wartość własna jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Zbiór wszystkich rozwiązań równania (14) nazywam *widmem macierzy* $\mathbf{A}$.

Przykład

Znajdźmy wartości własne macierzy obrotu płaskiego. W tym celu znajdujemy równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta - \lambda & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\beta - \lambda)^2 + \sin^2\beta \tag{15}$$

Znaleziony wielomian charakterystyczny nie ma pierwiastków rzeczywistych (poza przypadkiem $\sin\beta = 0$), gdyż jest sumą dwu składników nieujemnych. Istnieją dwa pierwiastki zespolone: $\lambda_1 = \cos\beta + i\sin\beta$, $\lambda_2 = \cos\beta - i\sin\beta$. Zauważmy, że $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Jak widzimy, niesymetryczna macierz rzeczywista może mieć zespolone wartości własne.

Diagonalizacja

Przypuśćmy, że wektory $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ są wektorami własnymi pewnej macierzy $\mathbf{A}$, a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ odpowiednimi wartościami własnymi. Utwórzmy macierz $\mathbf{X}$, której **kolumnami są kolejne wektory** $\mathbf{x}^{(i)}$. Każdy z wektorów $\mathbf{x}^{(i)}$ spełnia $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}$. Gdybyśmy wszystkie te zależności chcieli zapisać łącznie, to *zgodnie z zasadami mnożenia macierzowego* przybrałoby to postać

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\,\mathsf{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \tag{16}$$

Faktycznie, niech $x_k^{(l)}$ oznacza k-tą składową l-tego wektora, czyli k-ty wiersz l-tej kolumny macierzy $\mathbf{X}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}\,\mathsf{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} &= \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \lambda_2 x_1^{(2)} & \ldots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \lambda_1 x_2^{(1)} & \lambda_2 x_2^{(2)} & \ldots & \lambda_n x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \lambda_2 x_n^{(2)} & \ldots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{bmatrix} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{X}$ została wymnożona przez λ_1, druga przez λ_2 itd.

Jeżeli wszystkie wektory własne są liniowo niezależne, $\det \mathbf{X} \neq 0$ i istnieje macierz $\mathbf{X}^{-1}$. Wówczas mnożąc (16) od lewej strony przez $\mathbf{X}^{-1}$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \tag{18}$$

Transformację po lewej (18) nazywam transformacją podobieństwa. Macierze, dla których istnieje transformacja podobieństwa sprowadzająca je do postaci diagonalnej, nazywam *normalnymi* lub *diagonalizowalnymi*. Transformację podobieństwa, która sprowadza macierz do postaci diagonalnej, można rozumieć jako znalezienie takiej bazy, w której elementy macierzowe danego operatora przybierają postać macierzy diagonalnej.

Powtórzmy, że kolumny macierzy $\mathbf{X}$ tworzą kolejne wektory własne macierzy $\mathbf{A}$.

Ortogonalne transformacje podobieństwa

Szczególne znaczenie mają takie transformacje podobieństwa (nie wyłącznie transformacje diagonalizujące!), w których macierz $\mathbf{X}$ jest ortogonalna:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^T \tag{19}$$

Własności ortogonalnych transformacji podobieństwa:

1. Wyznacznik macierzy nie zmienia się w wyniku ortogonalnej transformacji podobieństwa.
2. Ślad macierzy nie zmienia się w wyniku ortogonalnej transformacji podobieństwa, gdzie przez “ślad macierzy” rozumiemy sumę jej elementów diagonalnych:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{20}$$

3. Ortogonalna transformacja podobieństwa nie zmienia widma macierzy. Istotnie,

$$
\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{A}' - \lambda\mathbb{I}\right) = \det\left(\mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} - \lambda\mathbf{O}^T\mathbf{O}\right) = \det\left(\mathbf{O}^T\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}\right)\mathbf{O}\right) \\
= \left(\det\mathbf{O}^T\right)\cdot\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\cdot(\det\mathbf{O}) = (\det\mathbf{O})^2\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) \\
= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})
\end{aligned}
\tag{21}
$$

a więc ortogonalna transformacja podobieństwa nie zmienia równania charakterystycznego.

4. Ortogonalna transformacja podobieństwa zachowuje uogólniony iloczyn skalarny:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}' \circ \mathbf{v}' = \mathbf{u}'^T\mathbf{A}'\mathbf{v}' \\
(\mathbf{O}\mathbf{u})^T\mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u} \circ \mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Diagonalizacja dwu macierzy

Twierdzenie: Jeżeli dwie macierze komutują, $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$, istnieje transformacja podobieństwa diagonalizująca *obie* te macierze. Jeżeli macierze **nie** komutują, nie da się ich jednocześnie zdiagonalizować.

Przykład

Łatwo sprawdzić, że macierze

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{35}{8} & -\frac{9}{8} \\ \frac{9}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \tag{23a}$$

komutują (druga z nich jest kwadratem pierwszej). Jednocześnie

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{8} & \frac{3\sqrt{10}}{8} \\ \frac{3\sqrt{10}}{8} & -\frac{\sqrt{10}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{23b}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{8} & \frac{3\sqrt{10}}{8} \\ \frac{3\sqrt{10}}{8} & -\frac{\sqrt{10}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{35}{8} & -\frac{9}{8} \\ \frac{9}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{23c}$$

Wartości i wektory własne macierzy odwrotnej

Niech $\mathbf{B}$ będzie odwracalna, $\det \mathbf{B} \neq 0$, i niech λ będzie jej wartością własną a $\mathbf{x}$ odpowiadającym jej wektorem własnym:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{24a}$$

Mnożąc powyższe równanie lewostronnie przez $\mathbf{B}^{-1}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} &= \lambda \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} && \text{(24b)} \\ \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} && \text{(24c)} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} && \text{(24d)} \end{aligned}$$

Macierz i macierz odwrotna mają te same wektory własne, a ich wartości własne są swoimi odwrotnościami.

Przykład rozbudowany

Niech

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{25a}$$

Dla macierzy 2×2 (i tylko dla nich!) istnieje prosty wzór na macierz odwrotną. Odwrotnością $\mathbf{D}^{-1}$ macierzy (25a) jest

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{25b}$$

Istotnie,

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4-1 & 2-2 \\ -2+2 & -1+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \tag{25c}$$

Znajdziemy teraz wartości i wektory własne macierzy $\mathbf{D}$ i $\mathbf{D}^{-1}$.

Dla macierzy $\mathbf{D}$ (25a) mamy:

$$\left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{array} \right| = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \tag{25d}$$

a więc $\lambda = 1, 3$. Oznaczmy wektor własny przez $[a, b]$. Rozważamy równanie

$$\left[\begin{array}{cc} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \tag{25e}$$

Podstawiając $\lambda = 1$ otrzymuję $a + b = 0$, skąd $b = -a$. Podstawiając $\lambda = 3$ otrzymuję $-a + b = 0$, skąd $b = a$. Widzimy zatem, że wektory

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right] \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \tag{25f}$$

są unormowanymi wektorami własnymi macierzy (25a), odpowiednio, do wartości własnych 1 i 3.

Z kolei dla macierzy $\mathbf{D}^{-1}$ (25b) mamy:

$$\left|\begin{array}{cc} \frac{2}{3}-\mu & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\mu \end{array}\right| = \left(\frac{2}{3}-\mu\right)^2 - \frac{1}{9} = \mu^2 - \frac{4}{3}\mu + \frac{3}{9} \tag{25g}$$

skąd $\mu = 1, \frac{1}{3}$. Oznaczając wektor własny $[p,q]$ otrzymujemy dla $\mu = 1$ $-(1/3)p - (1/3)q = 0$, czyli $q = -p$, zaś dla $\mu = 1/3$ $(1/3)p - (1/3)q = 0$, a więc $q = p$. Wynika stąd, że wektory (25f) są **także** wektorami własnymi macierzy $\mathbf{D}^{-1}$.

Podsumowując, wartości własne macierzy $\mathbf{D}^{-1}$ i $\mathbf{D}$ są swoimi odwrotnościami: $\mu = 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 3$, a wektory własne nie zmieniają się.

Przesunięte wartości własne

Niech $\mathbf{x}$ będzie wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ do wartości własnej λ i niech α będzie jakąś liczbą. Obliczmy

$$(\alpha\mathbb{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha\mathbb{I}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} \tag{26a}$$

$$(\alpha\mathbb{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = (\alpha + \lambda)\mathbf{x} \tag{26b}$$

Jeśli do macierzy dodamy macierz jednostkową pomnożoną przez stałą, jej wektory własne nie zmieniają się, a wartości własne przesuwają się o tę stałą.

Macierze symetryczne

Macierzą symetryczną, rzeczywistą nazywam macierz $\mathbb{R}^{n\times n}$, która spełnia

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \tag{27}$$

Macierze symetryczne, rzeczywiste wyglądają tak samo, niezależnie czy czytać je kolumnami, czy wierszami.

Macierze takie odgrywają **wielką** rolę w fizyce.

Przykłady

Następujące macierze są symetryczne i rzeczywiste:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 128 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & & 2 & & & \\ 1 & & & 2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

(niezaznaczone elementy są zerami)

Wartości własne macierzy symetrycznej, rzeczywistej

Twierdzenie: Wartości własne macierzy symetrycznej, rzeczywistej są rzeczywiste.

Dowód. Niech $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ i niech zachodzi

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{28a}$$

Dokonajmy sprzężenia zespolonego (28a). Ponieważ $\mathbf{A}$ jest rzeczywista, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Otrzymujemy

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{x}^* \tag{28b}$$

Mnożymy (28a) lewostronnie przez $(\mathbf{x}^*)^T$, a (28b) lewostronnie przez $\mathbf{x}^T$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda \, (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x} && (28c) \\ \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^* &= \lambda^*\mathbf{x}^T\mathbf{x}^* && (28d) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\mathbf{x}^T\mathbf{x}^*$ jest *liczbą*, a zatem $\mathbf{x}^T\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}^*\right)^T = (\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{x}$. Podobnie $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^*$ jest liczbą, a wobec tego

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^*\right)^T = (\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{28e}$$

gdzie ostatnia równość wynika z symetrii macierzy $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Równania (28c), (28d) możemy więc zapisać w postaci

$$(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{A}\mathbf{x} \;=\; \lambda\,(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{x} \tag{28f}$$
$$(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{A}\mathbf{x} \;=\; \lambda^*\,(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{x} \tag{28g}$$

Odejmując stronami równania (28f), (28g), otrzymujemy ostatecznie

$$0 = (\lambda - \lambda^*)\,(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{x} \tag{28h}$$

ponieważ $\mathbf{x} \neq 0$, $(\mathbf{x}^*)^T\,\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$, wnioskujemy, że $\lambda = \lambda^*$, czyli $\lambda \in \mathbb{R}$, co kończy dowód.

$\square$

Ortogonalne wektory własne

Twierdzenie: Wektory własne macierzy symetrycznych, rzeczywistych do *różnych* wartości własnych są ortogonalne.

Dowód. Niech $\lambda_1 \neq \lambda_2$ będą wartościami własnymi pewnej macierzy symetrycznej, rzeczywistej:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad (29a) \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad (29b) \end{aligned}$$

Mnożymy lewostronnie pierwsze z równań (29) przez $\mathbf{x}_2^T$, drugie zaś przez $\mathbf{x}_1^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 \quad (30a) \\ \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2 \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 \quad (30b) \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio, korzystając z symetrii macierzy $\mathbf{A}$, możemy łatwo pokazać, że $\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2$. Odejmując równania (30) stronami otrzymujemy

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 \tag{31}$$

a zatem, ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, widzimy, iż $\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 = 0$.

$\square$

Inne własności macierzy symetrycznych, rzeczywistych

1. Odwrotność macierzy symetrycznej jest symetryczna. Jeżeli $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ oraz $\det \mathbf{A} \neq 0$, wówczas $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbf{A}^{-1}$.

2. Ortogonalna transformacja podobieństwa zachowuje symetrię. Niech $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ oraz $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbb{I}$. Wówczas

$$\mathbf{A}' = \mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} \tag{32a}$$

$$\left(\mathbf{A}'\right)^T = \left(\mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O}\right)^T = \mathbf{O}^T\mathbf{A}^T\mathbf{O} = \mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} = \mathbf{A}' \tag{32b}$$

Prosty przykład

Chcemy znaleźć wartości własne i odpowiadające im unormowane wektory własne macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 13 \end{bmatrix} \tag{33a}$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$P(\lambda) = (7-\lambda)(13-\lambda) - (-4)(-4) = \lambda^2 - 20\lambda + 75\,, \tag{33b}$$

a jego pierwiastkami są $\lambda = 5$, $\lambda = 15$. Są to poszukiwane wartości własne.

Oznaczając przez a, b składowe wektora własnego i podstawiając $\lambda = 5$ do równania $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ otrzymuję

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 2a & -4b & = & 0 \\ -4a & +8b & = & 0 \end{array} \right. \tag{33c}$$

Rozwiązaniem jest $a = 2b$, więc po unormowaniu okazuje się, że wektorem własnym macierzy (33a) do wartości własnej $\lambda = 5$ jest wektor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{33d}$$

Podobnie, podstawiając $\lambda = 15$ do równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, otrzymujemy

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} -8a & -4b & = & 0 \\ -4a & -2b & = & 0 \end{array} \right. \tag{33e}$$

Tu z kolei rozwiązaniem jest $b = -2a$, więc po unormowaniu jako wektor własny do wartości własnej $\lambda = 15$ otrzymujemy

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{33f}$$

Przykład: Wartości i wektory własne macierzy 4×4

Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{34a}$$

Jest to macierz symetryczna i rzeczywista, wiemy zatem, że musi mieć rzeczywiste wartości własne. Aby je znaleźć, musimy najpierw znaleźć wielomian charakterystyczny:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{34b}$$

Jest to wyznacznik 4×4, będziemy go obliczać korzystając z rozwinięcia Laplace'a, dla wygody, według czwartej kolumny.

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= (-1)^{1+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{4+4}\cdot(2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda^2+2\lambda-8)+(2-\lambda)\left(-\lambda^3+2\lambda^2+18\lambda-24\right) \\
&= \lambda^4-4\lambda^3-15\lambda^2+58\lambda-40 \qquad \text{(34c)}
\end{aligned}$$

Wielomian (34c) ma współczynniki całkowite, warto więc spróbować poszukać jego miejsc zerowych badając podzielniki wyrazu wolnego. Istotnie, $P(1)=0$. Dzielimy teraz $P(\lambda)$ przez dwumian $(\lambda-1)$. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$b_3 = 1 \tag{34d}$$
$$-b_3 + b_2 = -4 \tag{34e}$$
$$-b_2 + b_1 = -15 \tag{34f}$$
$$-b_1 + b_0 = 58 \tag{34g}$$

skąd wnioskujemy, że

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 18\lambda + 40\right) \tag{34h}$$

Występujący tu wielomian trzeciego stopnia także ma współczynniki całkowite, a jednym z jego miejsc zerowych (i zarazem podzielnikiem wyrazu wolnego) jest $\lambda = 2$. Po raz kolejny obniżamy stopień wielomianu, rozwiązując

$$c_2 = 1 \tag{34i}$$
$$-2c_2 + c_1 = -3 \tag{34j}$$
$$-2c_1 + c_0 = -18 \tag{34k}$$

czyli

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - \lambda - 20\right) \tag{34l}$$

Teraz w znany sposób znajdujemy pierwiastki wielomianu stopnia drugiego: $\lambda = 5$ oraz $\lambda = -4$. Ostatecznie

$$P(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 4) \tag{34m}$$

a więc wartościami własnymi macierzy (34a) są liczby $5, 2, 1, -4$ (zauważmy, że wszystkie one są dzielnikami wyrazu wolnego wielomianu (34c)).

Przystępujemy do obliczania wektorów własnych. Oznaczmy symbolicznie poszukiwany wektor własny przez $\mathbf{x} = [a, b, c, d]$. Podstawiamy $\lambda = 5$ do wyrażenia $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ i otrzymujemy

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} -a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ a & & -6b & & +3c & & & = & 0 \\ a & & +3b & & -6c & & & = & 0 \\ a & & & & & & -3d & = & 0 \end{array} \right. \tag{34n}$$

Rozwiązania zależą od jednego parametru: $a = 3d$, $b = c = d$. Po unormowaniu jako wektor własny macierzy (34a) do wartości własnej $\lambda = 5$ dostajemy

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{34o}$$

Aby znaleźć wektor własny do wartości własnej $\lambda = 2$, podstawiamy tę wartość do $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ i otrzymujemy

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} 2a & + \ b & + \ c & +d & = & 0 \\ a & -3b & +3c & & = & 0 \\ a & +3b & -3c & & = & 0 \\ a & & & & = & 0 \end{array} \right. \tag{34p}$$

skąd $a = 0$, $b = c$, $d = -2c$, co po unormowaniu daje jako wektor własny do wartości własnej $\lambda = 2$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \tag{34q}$$

Podobnie postępujemy dla wartości własnej $\lambda = 1$, otrzymując

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} 3a & + \; b & + \; c & +d & = & 0 \\ a & -2b & +3c & & = & 0 \\ a & +3b & -2c & & = & 0 \\ a & & & +d & = & 0 \end{array} \right. \tag{34r}$$

skąd wynika $a = -d$, $b = c = d$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{34s}$$

Wreszcie dla $\lambda = -4$ dostajemy

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} 8a & + \; b & + \; c & + \; d & = & 0 \\ a & +3b & +3c & & = & 0 \\ a & +3b & +3c & & = & 0 \\ a & & & +6d & = & 0 \end{array} \right. \tag{34t}$$

więc $a = d = 0$, $b = -c$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34u}$$

Zdegenerowane wartości własne

Twierdzenie o ortogonalności wektorów własnych głosi, że wektory własne macierzy symetrycznej, rzeczywistej do *różnych* wartości własnych są ortogonalne. Co jednak, gdy jakaś wartość własna się powtarza? Ma to miejsce, gdy równanie charakterystyczne ma pierwiastek wielokrotny. Taką wartość własną nazywam *zdegenerowaną*.

Jeśli któraś wartość własna jest zdegenerowana, wektory własne do tej wartości własnej rozpinają pewną podprzestrzeń (podprzestrzeń własną) o wymiarowości większej niż 1, ortogonalną do pozostałych wektorów własnych. W takiej podprzestrzeni własnej zawsze można wybrać bazę ortonormalną.

Przykład: macierz ze zdegenerowanymi wartościami własnymi

Znajdźmy wartości własne macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Jest to macierz symetryczna, rzeczywista, więc jej wartości własne są rzeczywiste, a wektory własne do *różnych* wartości własnych są ortogonalne.

Równaniem charakterystycznym jest

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{36}$$

Korzystając z odpowiedniego twierdzenia, łatwo sprawdzić, że $\lambda = 2$ jest całkowitym pierwiastkiem wielomianu (36), gdyż $-2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = 0$.

Algorytm dzielenia wielomianu (36) przez dwumian $(\lambda-2)$ prowadzi do układu równań

$$\begin{aligned} b_2 &= -1 && \text{(37a)} \\ -2b_2 + b_1 &= 0 && \text{(37b)} \\ -2b_1 + b_0 &= 3 && \text{(37c)} \end{aligned}$$

skąd $b_2 = -1$, $b_1 = -2$, $b_0 = -1$, a zatem równanie charakterystyczne przybiera postać

$$-\lambda^3+3\lambda+2 = (\lambda-2)(-\lambda^2-2\lambda-1) = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0\,. \quad (38)$$

Ostatecznie widzimy, że wartościami własnymi macierzy (35) są $\lambda = 2$ oraz $\lambda = -1$, przy czym ta druga jest dwukrotnie zdegenerowana.

Przystępujemy do szukania wektorów własnych. Oznaczmy symbolicznie poszukiwany wektor przez $\mathbf{x} = [a, b, c]$. Bierzemy $\lambda = 2$ i wstawiamy do równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} -2a + b + c &= 0 && \text{(39a)} \\ a - 2b + c &= 0 && \text{(39b)} \\ a + b - 2c &= 0 && \text{(39c)} \end{aligned}$$

Wyznacznik główny tego układu — jak wiemy — wynosi 0, a rozwiązania zależą od jednego parametru: $a = b = c$. Po unormowaniu dostajemy

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{40}$$

jako unormowany wektor własny macierzy (35) do wartości własnej $\lambda = 2$.

Teraz bierzemy $\lambda = -1$. Wszystkie trzy równania definiujące składowe wektora własnego redukują się do jednego równania:

$$a + b + c = 0 \tag{41}$$

i możemy wziąć dowolne liczby spełniające ten warunek; zauważmy, że jest to warunek ortogonalności do wektora (40), co nie powinno dziwić. Weźmy $b = -a$, $c = 0$, co po unormowaniu daje

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Drugiego wektora własnego do wartości własnej $\lambda = -1$ musimy szukać jako wektora ortogonalnego do (40) i liniowo niezależnego od (42). *Wygodnie* jest przyjąć, że ten trzeci wektor własny jest także ortogonalny do

(42), czyli jego składowe muszą spełniać

$$a + b + c = 0 \tag{43a}$$

$$a - b = 0 \tag{43b}$$

Unormowanym rozwiązaniem jest

$$\mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \tag{44}$$

Układ wektorów $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ stanowi układ wzajemnie ortogonalnych wektorów własnych macierzy (35). Jak widzimy, wektory własne do różnych wartości własnych koniecznie muszą być ortogonalne, natomiast wektory własne do tej samej, zdegenerowanej wartości własnej możemy dobrać tak, aby były do siebie ortogonalne.

Zadanie ☺

Znajdź wartości własne i unormowane, wzajemnie ortogonalne wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Wskazówki:

1. Szukając wielomianu charakterystycznego, proszę zastosować rozwinięcie Laplace'a względem czwartej kolumny.
2. Wielomian charakterystyczny ma współczynniki całkowite i, jak się okazuje, *wszystkie* jego pierwiastki są całkowite. Proszę sprawdzić podzielniki wyrazu wolnego.

Podsumowanie

Podsumowując rozważania dotyczące wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznych, rzeczywistych, możemy powiedzieć, że

1. Wartości własne macierzy symetrycznych, rzeczywistych są rzeczywiste i jest ich tyle (licząc z krotnościami), ile wynosi wymiarowość przestrzeni;
2. Wektory własne macierzy symetrycznych, rzeczywistych do różnych wartości własnych są ortogonalne;

3. W przypadku zdegenerowanych wartości własnych, zawsze możemy dobrać wektory własne tak, aby były ortogonalne,

z czego wynika, że

Unormowane wektory własne macierzy symetrycznej, rzeczywistej stanowią bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^n$.

Diagonalizacja macierzy symetrycznej, rzeczywistej

Każdą macierz symetryczną, rzeczywistą daje się zdiagonalizować. Diagonalizacja ma formę ortogonalnej transformacji podobieństwa

$$\mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \tag{46}$$

gdzie kolejne unormowane wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ tworzą kolejne kolumny macierzy ortogonalnej $\mathbf{S}$.

Wyznacznik macierzy symetrycznej, rzeczywistej

Z równania (46) wynika, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \text{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\} \cdot \mathbf{S}^T \tag{47}$$

Pozwala to łatwo wyliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det\left(\mathbf{S} \cdot \text{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\} \cdot \mathbf{S}^T\right) \\
&= \det(\mathbf{S}) \cdot \det\left(\text{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\}\right) \cdot \det\left(\mathbf{S}^T\right) \\
&= \left(\det(\mathbf{S})\right)^2 \cdot \det\left(\text{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned} \tag{48}$$

gdyż a) wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników, b) wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy prostej, c) wyznacznik macierzy ortogonalnej $= \pm 1$,

$(\pm 1)^2 = 1$, d) wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi elementów diagonalnych. Wynika stąd ostatecznie, że wyznacznik macierzy symetrycznej, rzeczywistej jest równy iloczynowi jej wartości własnych (z uwzględnieniem krotności).

Uwaga o uogólnionym iloczynie skalarnym

Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną, rzeczywistą i dodatnio określoną

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \tag{49}$$

można przy jej pomocy zdefiniować uogólniony iloczyn skalarny:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \tag{50}$$

Sens tego iloczynu skalarnego (50) najlepiej zobaczyć przechodząc do bazy, w której macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalna. Z wyrażenia (46) otrzymujemy

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \,\mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\right\} \mathbf{S}^T \tag{51}$$

co po wstawieniu do (50) daje

$$\mathbf{x}^T \mathbf{S} \,\mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\right\} \mathbf{S}^T \mathbf{y} = \left(\mathbf{S}^T \mathbf{x}\right)^T \mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\right\} \left(\mathbf{S}^T \mathbf{y}\right) \tag{52}$$

$\mathbf{S}^T\mathbf{x}$, $\mathbf{S}^T\mathbf{y}$ to wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wyrażone w innej bazie. W tej bazie uogólniony iloczyn skalarny działa podobnie, jak zwykły, z tym, że przyczynki od poszczególnych, wzajemnie prostopadłych, kierunków, odpowiadających kierunkom wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$, są domnażane przez dodatnie wagi, równe wartościom własnym $\mathbf{A}$.

Obserwacja: Macierz symetryczna jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie wartości własne są większe od zera.

Istotnie, niech $\{\mathbf{e}_i\}$ będą wektorami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, a $\lambda_i > 0$ będą odpowiadającymi im wartościami własnymi. Ponieważ wektory $\{\mathbf{e}_i\}$ stanowią bazę, każdy wektor można przedstawić w postaci

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \tag{53}$$

Obliczamy

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i\right)^T\mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{e}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{A}\mathbf{e}_j\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_j\lambda_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\lambda_j\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\lambda_j\delta_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i > 0 \tag{54}$$

gdyż wszystkie wyrazy ostatniej sumy są nieujemne, a co najmniej jedno $\alpha_i \neq 0$. $\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, gdyż baza rozpinana przez unormowane wektory własne macierzy symetrycznej, rzeczywistej, jest ortonormalna.