Fizyka dla firm — Matematyka

12. Układy równań liniowych

Operatory liniowe

Wektory w $\mathbb{R}^N$

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

17 listopada 2022

Układ równań liniowych

Układ równań liniowych ma postać

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

Liczby a_{ij} nazywamy *współczynnikami układu równań*, liczby b_i *wyrazami wolnymi*. x_i oznaczają niewiadome. W powyższych oznaczeniach $i, j = 1, \dots, n$: w tym wykładzie ograniczamy się do przypadków, w których liczba równań zgadza się z liczbą niewiadomych.

Zapis macierzowy układu równań liniowych

Zgodnie z zasadami mnożenia macierzy, układ równań (1) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Wzory Cramera

Niech W oznacza wyznacznik macierzy współczynników układu równań (2), $W = \det \mathbf{A}$. Wyznacznik ten nazywamy *wyznacznikiem głównym*.

Tworzymy *wyznaczniki poboczne* W_i przez zastąpienie i-tej kolumny macierzy współczynników przez kolumnę wyrazów wolnych:

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ itd} \tag{3}$$

Twierdzenie (Cramera): Jeżeli $W \neq 0$, układ równań (1) ma **jednoznaczne** rozwiązanie, przy czym

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \; x_2 = \frac{W_2}{W}, \; \dots, \; x_n = \frac{W_n}{W}. \tag{4}$$

Jeżeli $W = 0$, a *którykolwiek* $W_i \neq 0$, układ równań jest **sprzeczny** (nie ma rozwiązań).

Jeżeli $W = 0$ oraz *wszystkie* $W_i = 0$, układ równań ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 1

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \\ 5x & - & 2y & + & 7z & = & 10 \end{array}\right. \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} W &= \left|\begin{array}{rrr} 3 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 7 \end{array}\right| \\ &= 3\cdot 3\cdot 7 + (-5)\cdot(-5)\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 3 \\ &- 5\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot(-5)\cdot(-2) - 4\cdot(-5)\cdot 7 = 229 \end{aligned} \tag{5b}$$

$$
\begin{aligned}
W_x &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 10 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot 3\cdot 7 + (-5)\cdot(-5)\cdot 10 + 2\cdot(-2)\cdot 3 \\
&- 10\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-5)\cdot(-2) - 2\cdot(-5)\cdot 7 = 229 \qquad \text{(5c)} \\
W_y &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & 10 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 2\cdot 7 + 1\cdot(-5)\cdot 5 + 4\cdot 10\cdot 3 \\
&- 5\cdot 2\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 7 - 10\cdot(-5)\cdot 3 = 229 \qquad \text{(5d)} \\
W_z &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 10 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 3\cdot 10 + (-5)\cdot 2\cdot(-2) + 5\cdot(-5)\cdot 2 \\
&- 5\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - 4\cdot(-5)\cdot 10 = 229 \qquad \text{(5e)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{W_x}{W} = \frac{229}{229} = 1 && \text{(5f)} \\
y &= \frac{W_y}{W} = \frac{229}{229} = 1 && \text{(5g)} \\
z &= \frac{W_z}{W} = \frac{229}{229} = 1 && \text{(5h)}
\end{aligned}
$$

Przykład 2

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & iy & - & 2z & = & 10 \\ x & - & y & + & 2iz & = & 20 \\ ix & + & 3iy & - & (1+i)z & = & 30 \end{array}\right. \tag{6a}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & i & -2 \\ 1 & -1 & 2i \\ i & 3i & -(1+i) \end{vmatrix} = 6 - 8i \tag{6b}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 10 & i & -2 \\ 20 & -1 & 2i \\ 30 & 3i & -(1+i) \end{vmatrix} = -70 - 90i \tag{6c}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 1 & 20 & 2i \\ i & 30 & -(1+i) \end{vmatrix} = -90 - 30i \tag{6d}$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & i & 10 \\ 1 & -1 & 20 \\ i & 3i & 30 \end{vmatrix} = -50 - 50i \tag{6e}$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{W_x}{W} = \frac{-70-90i}{6-8i} = \frac{(-70-90i)(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{300-1100i}{100} \\
&= 3-11i \qquad \text{(6f)} \\
y &= \frac{W_y}{W} = \frac{-90-30i}{6-8i} = -3-9i \qquad \text{(6g)} \\
z &= \frac{W_z}{W} = \frac{-50-50i}{6-8i} = 1-7i \qquad \text{(6h)}
\end{aligned}
$$

Przykład 3

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & - & 2y & - & 5z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \\ -5x & - & 2y & + & 7z & = & 1 \end{array}\right. \tag{7a}$$

$$W = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \tag{7b}$$

Wyznacznik główny znika, więc ten układ równań na pewno nie ma jednoznacznego rozwiązania. Czy istnieje rozwiązanie niejednoznaczne?

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 72 \neq 0 \tag{7c}$$

Ponieważ $W = 0$, ale $W_x \neq 0$, układ równań jest sprzeczny.

Przykład 4

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & - & 2y & - & 5z & = & -1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ -5x & - & 2y & + & 7z & = & 1 \end{array}\right. \tag{8a}$$

Wyznacznik główny tego układu już obliczaliśmy, patrz (7b), i wiemy, że $W = 0$. Czy istnieje rozwiązanie niejednoznaczne?

$$W_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \tag{8b}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \tag{8c}$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8d}$$

Wyznacznik główny i wszystkie wyznaczniki poboczne znikają, więc układ ma rozwiązanie, ale nie jest ono jednoznacze. Spróbujmy je znaleźć.

W tym celu biorę *dwa* z równań (8a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & - & 2y & - & 5z & = & -1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \tag{8e}$$

i rozwiążę je traktując z jako parametr. Otrzymuję

$$x = z - \frac{1}{6}\,,\ y = z - \frac{1}{12} \tag{8f}$$

Zwróćmy uwagę, że przy spełnieniu (8f), trzecie z równań (8a) jest spełnione tożsamościowo:

$$-5\left(z-\frac{1}{6}\right)-2\left(z-\frac{1}{12}\right)+7z = -5z+\frac{5}{6}-2z+\frac{2}{12}+7z = 1 \equiv 1 \tag{8g}$$

Przykład 5

Jakie są warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2 z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = & c^3 \end{array}\right. \tag{9a}$$

Wyznacznik główny tego układu wynosi

$$\begin{aligned} W &= \left|\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{array}\right| = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - ac^2 - b^2c \\ &= -(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned} \tag{9b}$$

Jeżeli liczby a, b, c są parami różne, układ równań (9a) ma jednoznaczne rozwiązanie, które można wyznaczyć ze wzorów Cramera.

Jeżeli $a = b \neq c$, dwa z trzech równań (9a) są niezależne. Biorę pierwsze i trzecie równanie

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & = & a^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = & c^3 \end{array} \right. \tag{9c}$$

i rozwiązuję je, traktując y jako parametr. Otrzymuję

$$x = -ac(a + c - z) \tag{9d}$$

$$y = a^2 + (a + c)(c - z) \tag{9e}$$

a więc rozwiązania zależą od jednego parametru. Podobnie postępuję, gdy $a = c \neq b$, $b = c \neq a$ (trzeba wyeliminować inne z trzech równań).

Jeżeli $a = b = c$, tylko jedno z równań (9a) jest niezależne i otrzymuję rozwiązanie zależne od dwu parametrów:

$$x = a^3 - a^2 z - a y \tag{9f}$$

Komentarz: znaczenie wzorów Cramera

Wzory Cramera dostarczają *ścisłego, analitycznego* kryterium istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu równań (1); co więcej, jest to kryterium konstruktywne. W praktyce wykorzystanie wzorów Cramera jest ograniczone przez konieczność obliczania wyznaczników, co w ogólności wymaga rzędu $n!$ operacji, gdzie n jest wymiarowością problemu. Już dla $n \sim 5$ i większych może to być bardzo uciążliwe, a dla $n \gg 1$ oznacza to bardzo dużą liczbę obliczeń. Dlatego ze wzorów Cramera korzystamy dla niewielkich układów równań lub gdy dzięki szczególnym własnościom macierzy współczynników, obliczanie odpowiednich wyznaczników jest proste.

Poza tymi przypadkami korzystamy z innych metod rozwiązywania układów równań liniowych.

Reprezentacja wektorów w $\mathbb{R}^n$

Rozpatrzmy zbiór rzeczywistych macierzy jednokolumnowych o n-wierszach, $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Zauważmy, że zgodnie z ze zdefiniowanymi uprzednio operacjami na macierzach

$$a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

co z kolei zgadza się z działaniami na wektorach.

Jednokolumnowe, n wierszowe macierze rzeczywiste

traktujemy jak wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Iloczyn skalarny

Przypomnieliśmy klasyczną definicję iloczynu skalarnego

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\,. \tag{11}$$

Pokazaliśmy, że w przestrzeniach $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ definicja ta sprowadza się do sumy iloczynów po współrzędnych wektorów. Na tej podstawie zdefiniowaliśmy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$ jako

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,. \tag{12}$$

Wiedząc, że jednokolumnowe macierze o n wierszach traktujemy jak wektory w $\mathbb{R}^n$, powyższą definicję możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{13}$$

Iloczyn skalarny (13) będziemy nazywać euklidesowym iloczynem skalarnym.

Zauważmy, że wektor transponowany $\mathbf{x}^T$ odpowiada jednowierszowej macierzy o n kolumnach.

Iloczyn skalarny — uogólnienie

Badając własności iloczynu skalarnego (12) (lub, równoważnie, (13)), możemy wyciągnąć jego najbardziej istotne cechy matematyczne, pozwalające na sformułowanie *bardziej* ogólnej definicji iloczynu skalarnego:

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Iloczynem skalarnym nazywam funkcję $V \times V \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

1. Symetria: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$.
2. Rozdzielność względem dodawania wektorów:
   $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V : (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{z} + \mathbf{y} \circ \mathbf{z}$.
3. Zgodność z mnożeniem przez skalar:
   $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha \cdot \mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \alpha \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$.
4. Brak dzielników zera: $(\forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0) \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

5. Dodatnia określoność: $\forall \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$.

Z własności tych wynika, że

- Wektor zerowy jest jedynym wektorem ortogonalnym do *wszystkich* wektorów.
- Iloczyn skalarny jest biliniowy: liniowy w pierwszym i w drugim argumencie

$$
\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \circ \mathbf{z} &= \alpha \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{z}) + \beta \cdot (\mathbf{y} \circ \mathbf{z}) \qquad \text{(14a)} \\
\mathbf{x} \circ (\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) &= \alpha \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) + \beta \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{z}) \qquad \text{(14b)}
\end{aligned}
$$

Uogólniony iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$ definiujemy jako $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbb{I}\mathbf{y}$. Macierz $\mathbb{I}$ jest oczywiście symetryczna, rzeczywista. Co by się stało, gdyby zamiast macierzy jednostkowej wstawić tam jakąś *inną* macierz?

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{15}$$

Macierz $\mathbf{A}$ koniecznie musi być symetryczna, gdyż definicja iloczynu skalarnego wymaga symetrii:

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}\,, \tag{16}$$

co jest możliwe dla *dowolnych* wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Pojawia się inny problem: Iloczyn skalarny musi być dodatnio określony:

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \tag{17}$$

Macierze symetryczne spełniające warunek (17) nazywam *dodatnio określonymi*. Jeżeli macierz jest symetryczna i dodatnio określona, wyrażenie (15) definiuje iloczyn skalarny. Jest to *inny* iloczyn skalarny, niż "euklidesowy" iloczyn $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, naturalny dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ale formalnie jest on poprawnie zdefiniowany.

Wektory ortogonalne w sensie uogólnionego iloczynu skalarnego (15) nazywa się *wektorami sprzężonymi względem macierzy* $\mathbf{A}$.

Operator liniowy

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, zaś $\mathbf{A} : V \to V$ pewną funkcją, działającą z V w V. (Przypominam, ze "interesujące" są przypadki $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\mathbf{0}$ oznacza wektor zerowy w V. Mówimy, że $\mathbf{A}$ jest operatorem liniowym, jeżeli

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0}\,, \tag{18a}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\,,\ \mathbf{v} \in V : \alpha \cdot \mathbf{Av} = \mathbf{A}\left(\alpha \cdot \mathbf{v}\right), \tag{18b}$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{Au}) + (\mathbf{Av})\,. \tag{18c}$$

Z zasad (18) wynika, że efektem działania operatora liniowego na dowolną kombinację liniową wektorów, jest odpowiednia kombinacja liniowa wyników:

$$\mathbf{A}(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot (\mathbf{Au}) + \beta \cdot (\mathbf{Av})\,. \tag{19}$$

Zauważmy, że operator liniowy definiuje **funkcję** (**odwzorowanie**). Istotnie, jeżeli

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \tag{20a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 \tag{20b}$$

odejmując stronami i korzystając z liniowości dostajemy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \tag{20c}$$

Jeżeli $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, to $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, a zatem $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$. Równość argumentów pociąga równość wyników, mamy więc do czynienia z funkcją.

Macierze jako operatory liniowe

Rozważmy macierz kwadratową $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, oraz **jednokolumnowe** wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Z wprowadzonych poprzednio zasad na dodawanie i mnożenie macierzy wynika, że są one zgodne z zasadami (18).

Macierze kwadratowe $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ traktujemy jak operatory liniowe w $\mathbb{R}^n$, a jednokolumnowe, n wierszowe macierze jak wektory w tej przestrzeni.

Pojęcie operatora liniowego można ponadto uogólnić na funkcje działające pomiędzy *różnymi* przestrzeniami liniowymi, w szczególności, pomiędzy przestrzeniami liniowymi o różnych wymiarach. Wówczas macierze $\mathbf{A}^{m\times n}$ traktujemy jak operatory liniowe $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Podobnie dla $\mathbb{C}^n$.

Przykład

$$2\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 5-2\cdot 7\\ 2\cdot 5+6\cdot 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 52\end{bmatrix} \tag{21a}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\left(2\cdot\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 10-1\cdot 14\\ 1\cdot 10+3\cdot 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 52\end{bmatrix} \tag{21b}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-3 \\ 1+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8-4 \\ 4+12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1+4 \\ 10+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 26 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{22a}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-7 \\ 5+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 26 \end{bmatrix} \tag{22b}
$$

Macierz odwrotna

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie macierzą kwadratową. Macierz odwrotna, $\mathbf{A}^{-1}$ *jeśli istnieje*, musi spełniać

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I} \tag{23}$$

Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywam macierzą odwracalną. Macierz, dla której macierz odwrotna *nie* istnieje, nazywam macierzą osobliwą.

Twierdzenie: Macierz jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Własności macierzy odwrotnej

Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą macierzami kwadratowymi, odwracalnymi, rzeczywistymi lub zespolonymi, o takim samym wymiarze. Wówczas

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \tag{24a}$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = (\det \mathbf{A})^{-1} \tag{24b}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T} = \left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} \tag{24c}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{24d}$$

Macierz odwrotna, jeśli istnieje, jest macierzą, a zatem można ją utożsamiać z pewnym operatorem liniowym. Jak widzieliśmy, operatory liniowe zadają funkcje, czyli odwzorowania jednoznaczne. Wobec tego

Jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, odwzorowanie $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ jest **wzajemnie jednoznaczne**.

Jeżeli $\det \mathbf{A} = 0$, odwzorowanie $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ jest jednoznaczne, ale nie wzajemnie jednoznaczne.

Macierz odwrotna do macierzy 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{25a}$$

Istotnie,

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25b}$$

Zapis symboliczny układu równań liniowych

Ponieważ macierze jednokolumnowe można utożsamiać z wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$), układ równań (2) można zapisać symbolicznie w postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{26}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą współczynników, o elementach a_{ij}, $\mathbf{b}$ jest wektorem wyrazów wolnych, czyli wektorem o składowych b_i, natomiast $\mathbf{x}$ reprezentuje wektor niewiadomych, a jego składowe oznaczamy x_i.

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, lub też $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. W każdym wypadku zakładamy, że znamy wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ oraz wszystkie składowe wektora $\mathbf{b}$. Naszym celem jest obliczenie składowych wektora niewiadomych, $\mathbf{x}$.

Wyrażenie (26) jest równaniem liniowym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$).

Rozwiązanie formalne

Formalne rozwiązanie równania (26) ma postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{27}$$

o ile macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ istnieje. Wiemy już, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia macierzy odwrotnej jest, aby $\det\mathbf{A} \neq 0$. Wnioskujemy stąd, że jeżeli wyznacznik macierzy współczynników układu równań (1) **nie** znika, układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie.

Caveat emptor! W ogólnym wypadku jawna konstrukcja macierzy odwrotnej do macierzy współczynników, $\mathbf{A}^{-1}$, **nie** jest najbardziej efektywnym sposobem rozwiązywania układu równań liniowych.

Obserwacja. Jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu równań

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{28}$$

jest $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Warunkiem koniecznym na to, aby jednorodny układ równań (28) posiadał nietrywialne (niezerowe) rozwiązanie, jest $\det \mathbf{A} = 0$.