Fizyka dla firm — Matematyka

11. Rachunek macierzowy

P. F. Góra
https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

10 listopada 2022

Macierze

Macierzą nazywam prostokątną tablicę liczb. Przypuśćmy, że tablica ta ma M wierszy i N kolumn. Oznaczmy tę tablicę przez $\mathbf{A}$. Jeśli liczby, z których zbudowana jest macierz (elementy macierzy), są rzeczywiste, mówię, że $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$. Jeśli elementy macierzy są zespolone, mówię, że $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$.

Przykłady macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 8 \\ 16 & -3 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\ln 2}{3} & \frac{\ln 3}{2} \\ \frac{5}{16} & -\frac{8}{19} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy

Element macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ (lub $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$) stojący na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny oznaczam A_{ij}. Zauważmy, że $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$. Dla macierzy z jednego z powyższych przykładów

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 8 \\ 16 & -3 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = -2$, $A_{12} = 1$, $A_{14} = 8$, $A_{21} = 16$,$A_{23} = 2$. Symbol "A_{11}" czytam "a-jeden-jeden". Na ogół nie ma potrzeba oddzielania indeksów przecinakami, ale można to robić, a niekiedy trzeba, jeśli z kontekstu nie jest jasne, o co chodzi. Na przykład zamiast $A_{11} = -2$ mógłbym napisać $A_{1,1} = -2$.

Kolejność ma znaczenie! W ogólności $A_{ij} \neq A_{ji}$. W powyższym przykładzie $A_{12} = 1$, natomiast $A_{21} = 16$. $A_{23} = 2$, a element A_{32} w ogóle nie jest określony.

Mnożenie macierzy przez skalar

Definiuję mnożenie macierzy przez skalar w ten sposób, że wszystkie elementy macierzy należy pomnożyć przez ten skalar. Na przykład

$$-2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 4 & -2\cdot 1 & -2\cdot 0 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 4 & -2\cdot 1 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 1 & -2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dodawanie macierzy

Macierze o takich samych wymiarach, czyli dwie macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ można dodawać w ten sposób, że dodaje się ich odpowiednie elementy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \dots & b_{MN} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1N}+b_{1N} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2N}+b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1}+b_{M1} & a_{M2}+b_{M1} & \dots & a_{MN}+b_{MN} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Zbiór macierzy o takich samych wymiarach, wraz z dodawaniem i mnożeniem przez skalar, tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$).

Mnożenie macierzy

Niech będą dane dwie macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times L}$ (to samo dla $\mathbb{C}$) — liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy. Dla takich macierzy możemy określić ich iloczyn

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{3a}$$

będący macierzą o elementach danych wzorem

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot b_{jk}\,, \quad i = 1, \dots, M \;\; k = 1, \dots, L \tag{3b}$$

Formalnie mnożenie macierzy (3b) polega na sumowaniu po drugim wskaźniku pierwszego czynnika i pierwszym wskaźniku drugiego czynnika. W praktyce macierze mnoży się na zasadzie “wiersze przez kolumny”.

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 5 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 22 \end{bmatrix} \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 6\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \\ 17 & -5 \end{bmatrix} \tag{4c}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{działanie nie jest poprawnie zdefiniowane!} \tag{4d}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4e}$$

Macierze kwadratowe

Jeżeli liczba wierszy macierzy jest równa liczbie jej kolumn, mówimy, że macierz jest *kwadratowa*. Najczęściej, choć nie wyłącznie, będziemy mówić o takich właśnie macierzach, rzeczywistych lub zespolonych.

Macierze kwadratowe $\mathbb{R}^{N\times N}$ ($\mathbb{C}^{N\times N}$) mają N^2 rzeczywistych (zespolonych) elementów.

Macierz jednostkowa

Macierzą jednostkową nazywam macierz kwadratową, która na głównej przekątnej ma same jedynki, a poza główną przekątną same zera.

$$\mathbb{I} = [\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Formalnie istnieją “osobne” macierze jednostkowe dla różnych rozmiarów macierzy kwadratowych: 2×2, 3×3, ...

Macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy kwadratowych: $\forall N\,, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N} : \mathbf{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Delta Kroneckera

Elementy macierzy jednostkowej możemy zapisać w postaci *delty Kroneckera*:

$$\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

Macierz jednostkowa ma jedynki na głównej przekątnej (numer wiersza równa się numerowi kolumny) i zera na wszystkich pozostałych pozycjach (numer wiersza różni się od numeru kolumny).

Mnożenie macierzy jest nieprzemienne!

W ogólności $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} \tag{7b}$$

Macierze kwadratowe należące do $\mathbb{R}^{N\times N}$ (lub $\mathbb{C}^{N\times N}$) wraz z dodawaniem i mnożeniem macierzy tworzą pierścień (nieprzemienny) z jedynką.

Komutator

Różnicę iloczynów $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ nazywamy komutatorem tych macierzy i oznaczamy

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \tag{8}$$

Jeśli mnożenie jakichś dwu macierzy jest przemienne, ich komutator znika. O takich macierzach mówimy, że komutują.

Przykład

Jeśli pierwszą z macierzy w (7a) oznaczymy przez $\mathbf{A}$, drugą przez $\mathbf{B}$, ich komutator wynosi

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Transpozycja macierzy

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$. Macierzą transponowaną do macierzy $\mathbf{A}$ nazywam macierz $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{N\times M}$, w której wiersze zamieniają się w kolumny, kolumny zaś w wiersze. Jeśli oznaczymy elementy macierzy $\mathbf{A}$ przez A_{ij}, to

$$A^T_{ij} = A_{ji} \tag{10}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Traspozycja odwraca kolejność mnożenia

Rozważmy mnożenie macierzy kwadratowych. Jeśli przyjrzymy się definicji mnożenia macierzowego (3b) możemy zauważyć, że transpozycja odwraca kolejność czynników. Istotnie, niech $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$. Mamy

$$\sum_{j=1}^{N} B^T_{ij} A^T_{jk} = \sum_{j=1}^{N} B_{ji} A_{kj} = \sum_{j=1}^{N} A_{kj} B_{ji} = C_{ki} = C^T_{ik} \tag{11}$$

skąd wnioskujemy, że

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{12}$$

Zasadę tę można rozszerzyć na więcej macierzy. Powiedzmy,

$$\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{R}^T\right)^T = \left(\mathbf{R}^T\right)^T \mathbf{Q}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{R}\mathbf{Q}^T\mathbf{P}^T \tag{13}$$

gdyż $\left(\mathbf{R}^T\right)^T = \mathbf{R}$.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{14a}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{14b}$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej

Niech $\mathbf{A}$ będzie rzeczywistą (lub zespoloną) macierzą **kwadratową** $n \times n$. Niech $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ będą jej elementami. Utwórzmy iloczyn $a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdots a_{n,\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest permutacją liczb $1, 2, \ldots, n$. Iloczyn ten zawiera dokładnie jeden element każdego wiersza i każdej kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Opatrzmy go znakiem permutacji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Sumę

$$\sum_{\text{wszystkie permutacje}} (-1)^{\text{krotność permutacji}} a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdots a_{n,\alpha_n} \tag{15}$$

nazywam wyznacznikiem macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczam $\det \mathbf{A}$.

Wyznacznik macierzy zapisuje się też często w postaci (proste kreski!)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Ponieważ wszystkich permutacji ciągu n-elementowego jest $n!$, do obliczenia wyznacznika “z definicji” potrzeba rzędu $n!$ operacji, co jest (i) kosztowne i (ii) kłopotliwe, gdyż trzeba pilnować, aby nie “zgubić” jakiegoś składnika. Na szczęście, wyznaczniki macierzy 2×2 i 3×3 liczy się prosto, a wyznaczniki macierzy wyższych rzędów można obliczać korzystając z rozwinięcia Laplace’a (patrz niżej).

Wyznacznik macierzy 2×2

Wyznacznik macierzy 2×2 jest sumą dwóch składników, gdyż ciąg dwuelementowy ma tylko $2! = 2$ permutacji. Permutacja $\{1, 2\}$ jest parzysta, permutacja $\{2, 1\}$ jest nieparzysta.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{17}$$

Reguła mnemotechniczna: Wyznacznik macierzy 2×2 jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej minus iloczyn elementów na antyprzekątnej.

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2\,. \tag{18a}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 201 & 50 \\ 281 & 70 \end{vmatrix} &= 201 \cdot 70 - 281 \cdot 50 \\ &= (1 + 4 \cdot 50) \cdot 70 - (1 + 4 \cdot 70) \cdot 50 \\ &= 1 \cdot 70 + 4 \cdot 50 \cdot 70 - 1 \cdot 50 - 4 \cdot 70 \cdot 50 \\ &= 1 \cdot 70 - 1 \cdot 50 = 20 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 70 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{18b}$$

$$\begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{vmatrix} = (1-i)\cdot(1+i) - 1\cdot 1 = 1-(i)^2 - 1 = -(-1) = 1 \tag{18c}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - \left(-\sin^2\varphi\right) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{18d}$$

Wyznacznik macierzy 3×3

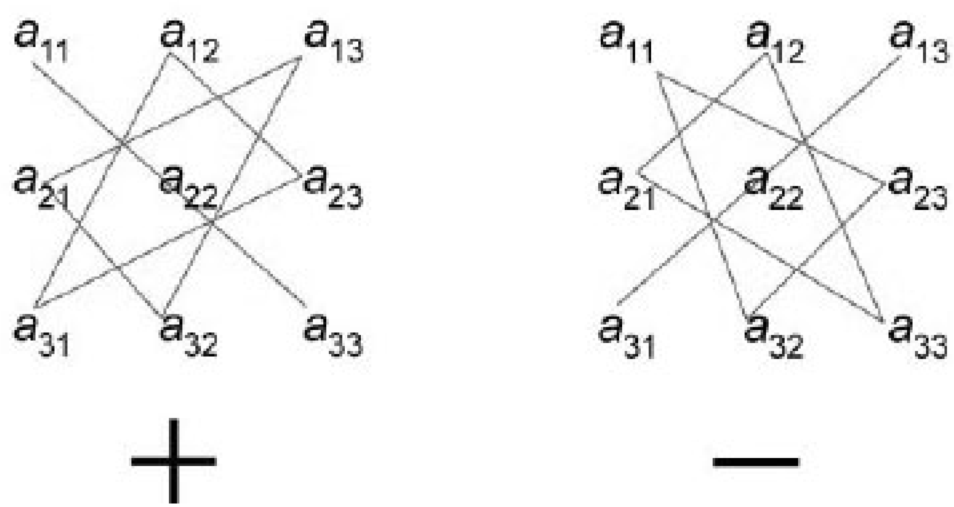
Wyznacznik macierzy 3×3 jest sumą sześciu składników, gdyż ciąg trzy-elementowy ma $3! = 6$ permutacji. Permutacje $\{1,2,3\}, \{3,1,2\}, \{2,3,1\}$ są parzyste, permutacje $\{3,2,1\}, \{2,1,3\}, \{1,3,2\}$ są nieparzyste. Zatem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\,. \tag{19}$$

Reguła Sarrusa

Mnemotechnicznym sposobem obliczania wyznacznika macierzy 2×3 jest *reguła Sarrusa*:

Wyznacznik liczymy tak:



. . . albo tak:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|a_{11}\right. & a_{12} & a_{13} & \left|a_{11}\right. & a_{12} \\ \left|a_{21}\right. & a_{22} & a_{23} & \left|a_{21}\right. & a_{22} \\ \left|a_{31}\right. & a_{32} & a_{33} & \left|a_{31}\right. & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array} =$$

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0\,. \quad \text{(20a)}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot e + 0\cdot0\cdot d + 0\cdot0\cdot b - b\cdot c\cdot d - 0\cdot0\cdot a - 0\cdot0\cdot e$$

$$= ace - bcd = c(ae - bd) \quad \text{(20b)}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i & 1-i \\ 2+i & 7-3i & 3-i \\ 1+i & 4-6i & 2-3i \end{vmatrix} &= (2+3i)(7-3i)(2-3i) \\
&+ (2-2i)(3-i)(1+i) \\
&+ (2+i)(4-6i)(1-i) \\
&- (1+i)(7-3i)(1-i) \\
&- (2-2i)(2+i)(2-3i) \\
&- (2+3i)(3-i)(4-6i) \\
&= 11(1-i) \qquad \text{(20c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\cos\vartheta\,\cos\varphi & -r\sin\vartheta\,\cos\varphi & -r\cos\vartheta\,\sin\varphi \\
\cos\vartheta\,\sin\varphi & -r\sin\vartheta\,\sin\varphi & r\cos\vartheta\,\cos\varphi \\
\sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0
\end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
& -r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos^2\varphi - r^2\cos^3\vartheta\,\sin^2\varphi \\
& -r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin^2\varphi - r^2\cos^3\vartheta\,\cos^2\varphi \\
= {} & -r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta - r^2\cos^3\vartheta = -r^2\cos\vartheta
\end{aligned}
\tag{20d}
$$

Rozwinięcie Laplace'a

Rozwinięcie Laplace'a to wzór rekurencyjny, pozwalający obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ "rozwijając" względem ustalonej kolumny lub ustalonego wiersza, z wyliczaniem wyznaczników o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$.

Ustalamy pewną kolumnę, j. Wówczas

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \mathrm{minor}(i,j) \tag{21}$$

gdzie "minor" to wyznacznik macierzy powstałej z wykreślenia i-tego wiersza i j-tej kolumny z wyjściowej macierzy.

Analogicznie — dla wierszy.

Przykład

Obliczmy wyznacznik

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{22}$$

Korzystam z rozwinięcia względem pierwszej kolumny.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \cdot 1 + 2(-1)^3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^4 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1)^5 \cdot 4 = -28 \end{aligned} \tag{23}$$

Obliczmy wyznacznik (22) jeszcze raz, tym razem korzystając z rozwinięcia względem drugiego wiersza:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{M} &= 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot \text{wyznacznik}_3 + 0\cdot(-1)^{2+4}\cdot\text{wyznacznik}_4 \\ &= -2\cdot 2 + (1-16-9) = -28 \end{aligned} \tag{24}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a, warto rozwijać według wiersza lub kolumny, w której pojawia się jak najwięcej zer.

Własności wyznaczników

- Wyznacznik iloczynu to iloczyn wyznaczników. Jeżeli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi o tym samym wymiarze, to

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) \tag{25}$$

- Wyznacznik macierzy transponowanej równa się wyznacznikowi macierzy przed transpozycją.

$$\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det \mathbf{A} \tag{26}$$

- Dla macierzy n-wymiarowej

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda^n \cdot \det \mathbf{A} \tag{27}$$

- Jeżeli macierz ma dwie kolumny identyczne, to jej wyznacznik jest równy zero.

- Przy przestawieniu dwu sąsiednich kolumn, znak wyznacznika ulega zmianie.

- Jeżeli macierz ma kolumnę zerową, to jej wyznacznik jest równy zero.

- Jeżeli *jedną* kolumnę macierzy pomnożymy przez stałą λ, to wyznacznik będzie się równać $\lambda \cdot$ (wyznacznik macierzy niewymnożonej).

- Jeżeli do elementów jednej kolumny macierzy dodamy elementy innej kolumny wymnożonej przez jakąś stałą, wyznacznik nie zmieni się.

- Ponieważ wyznacznik nie zauważa transpozycji, w powyższych własnościach “kolumnę” można zastąpić przez “wiersz”.

- Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi elementów diagonalnych.

  Istotnie, korzystając z rozwinięcia Laplace’a względem pierwszej kolumny

$$
\det \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{28}
$$

  Po prawej stronie (28) otrzymaliśmy wyznacznik macierzy o takiej samej strukturze, jak po lewej stronie, tylko o wymiarze o jeden mniejszym. Zatem, przez rekursję, otrzymujemy tezę, gdyż wszystkie występujące tu potęgi (-1) są parzyste.

- Wyznacznik macierzy trójkątnej, czyli macierzy mającej pod *lub* nad główną diagonalą same zera, jest równy iloczynowi elementów diagonalnych. (Dowód: rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny *lub* ostatniego wiersza.)

Przykłady

Obliczmy jeszcze raz wyznacznik (18b)

$$\begin{vmatrix} 201 & 50 \\ 281 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 201 - 4 \cdot 50 & 50 \\ 281 - 4 \cdot 70 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 70 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20 \tag{29a}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że do pierwszej kolumny można dodać drugą pomnożoną przez 4, a potem można wyciągnąć wspólny czynnik przed wyznacznik.

Obliczmy teraz ponownie wyznacznik (20a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2 \\ 4 & 5 & 6-5 \\ 7 & 8 & 9-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-1 & 1 \\ 4 & 5-4 & 1 \\ 7 & 8-7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{29b}$$

gdzie najpierw odjęliśmy drugą kolumnę od trzeciej, a potem pierwszą od drugiej. Powstały wyznacznik ma dwie kolumny identyczne, a zatem musi się równać 0.

Teraz obliczmy wyznacznik (20c)

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i & 1-i \\ 2+i & 7-3i & 3-i \\ 1+i & 4-6i & 2-3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i-2(1-i) & 1-i \\ 2+i & 7-3i-2(3-i) & 3-i \\ 1+i & 4-6i-2(2-3i) & 2-3i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 0 & 1-i \\ 2+i & 1-i & 3-i \\ 1+i & 0 & 2-3i \end{vmatrix} = (1-i)\cdot \begin{vmatrix} 2+3i & 1-i \\ 1+i & 2-3i \end{vmatrix} = 11(1-i) \tag{29c}$$

Od drugiej kolumny odjęliśmy trzecią pomnożoną przez 2, a potem dokonaliśmy rozwinięcia Laplace'a względem drugiej kolumny.

Po co jemy tę żabę?