Fizyka dla firm — Matematyka

10. Wektory

Grupa, pierścień, ciało

Przestrzeń liniowa

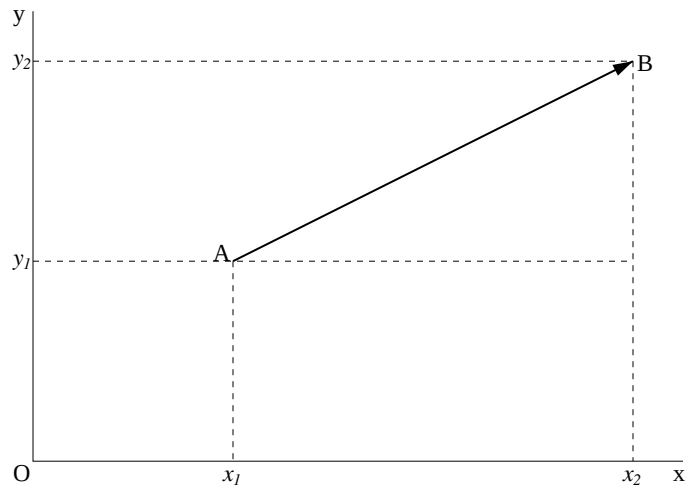
P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

3 listopada 2022

Wektor związany

Wektorem związanym nazywamy parę punktów. Jeżeli parę tę stanowią punkty A, B, wektor przez nie utworzony oznaczmy $\overrightarrow{AB}$. Graficznie koniec wektora oznaczamy strzałką. Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest różny od wektora $\overrightarrow{BA}$. Wektor o początku i końcu w tym samym punkcie nazywamy *wektorem zerowym*.



Przez pewien czas będziemy się ograniczali do punktów (i wektorów) na płaszczyźnie. Niech punkty A, B mają, odpowiednio, współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Budujemy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest wektor $\overrightarrow{AB}$, a przyprostokątne są równoległe do osi OX, OY. Z twierdzenia Pitagorasa widzimy, iż długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest dana przez

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{1}$$

Długość wektora $\overrightarrow{BA}$ jest taka sama, jak dugość wektora $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$.

Długość wektora zerowego wynosi zero.

Przykład 1

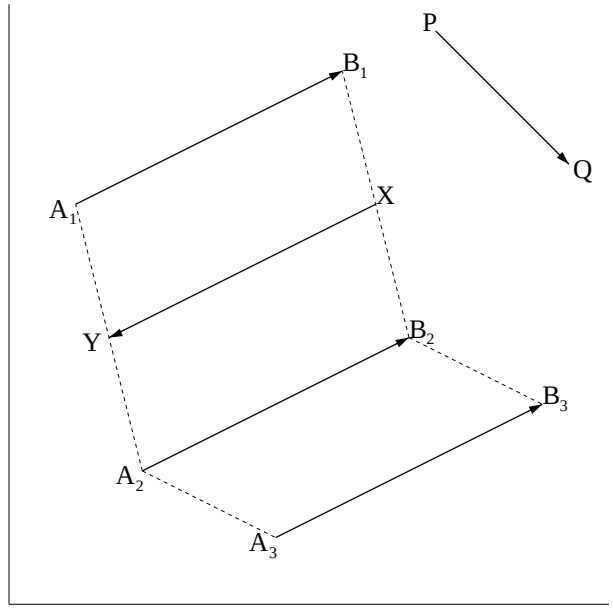
Obliczmy długość wektora, którego początek stanowi punkt P o współrzędnych $(1, 3)$, koniec punkt Q o współrzędnych $(3, -1)$.

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Równość wektorów

Mówimy, że dwa wektory są równe, jeśli za pomocą *przesunięcia równoległego* można je nałożyć na siebie, to znaczy doprowadzić do sytuacji, w której początek pierwszego wektora pokrywa się z początkiem drugiego i jednocześnie koniec pierwszego wektora pokrywa się z końcem drugiego.

Rozważmy dwa wektory $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$. Niech początki i końce tych wektorów mają, odpowiednio, współrzędne $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, $S(x_4, y_4)$. Zauważmy, że do tego, aby wektory te były równe, potrzeba i wystarcza, aby <u>jednocześnie</u> zachodziły równości $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ oraz $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.



W pokazanej na rysunku 2 sytuacji, wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ są równe, ale **nie** są równe wektorowi $\overrightarrow{XY}$. Żaden z tych wektorów nie jest równy wektorowi $\overrightarrow{PQ}$.

Łatwo pokazać, iż relacja równości wektorów tworzy *relację równoważnościową*, gdyż

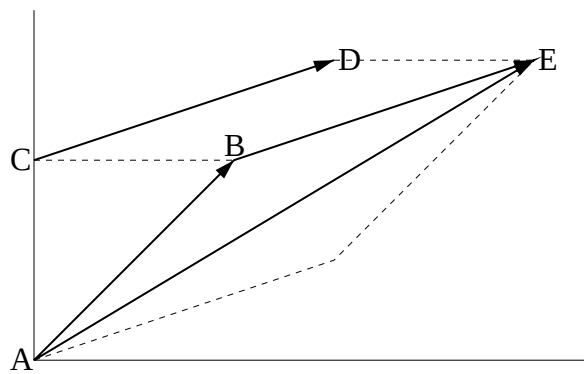
1. jest to relacja zwrotna (każdy wektor jest równy samemu sobie),

2. jest relacją symetryczną (jeżeli $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, to $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$),

3. jest relacją przechodnią (gdyż złożenie dwu przesunięć równoległych jest przesunięciem równoległym).

Dodawanie wektorów

Aby dodać dwa wektory związane, wykonujemy następującą operację*: Chcemy obliczyć $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. W tym celu stosujemy następującą regułę równoległoboku:



*Mowimy tu o matematyce. W fizyce określona jest tylko suma wektorów zaczepionych w tym samym punkcie. Oblicza się ją zresztą według tego samego algorytmu, jaki jest omawiany tutaj.

1. *Przesuwamy równolegle* wektor $\overrightarrow{CD}$ tak, aby jego początek pokrył się z końcem wektora $\overrightarrow{AB}$. Koniec przesuniętego wektora oznaczamy przez E.
2. Budujemy równoległobok, którego dwoma bokami są wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$.
3. Sumą wektorów staje się przekątna powstałego równoległoboku, czyli wektor $\overrightarrow{AE}$.

Jak widzimy, przy rozważaniu równości i dodawania wektorów zaczepionych, fakt, iż mają one określone początki i końce, raczej utrudnia, niż ułatwia rozważania.

Wektory swobodne

Korzystając z faktu, iż relacja równości wektorów zaczepionych jest relacją równoważnościową, możemy podzielić cały zbiór wektorów zaczepionych na płaszczyźnie na zbiory wektorów równych (klasy abstrakcji względem relacji równości wektorów). Innymi słowy, *utożsamiamy* wszystkie równe sobie wektory zaczepione. Po utożsamieniu wektorów równych, otrzymujemy *wektory swobodne*. Zwyczajowo przedstawia się je jako zaczepione w początku układu współrzędnych. Wektory swobodne będziemy oznaczać literami półgrubymi.

Wektor swobodny reprezentowany przez strzałkę o początku w środku układu współrzędnych i końcu w punkcie $P(x, y)$ oznaczamy $[x, y]$. Liczby x, y nazywamy składowymi tego wektora.

Działania na wektorach swobodnych

Niech będą dane dwa wektory swobodne $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$. *Sumę wektorów* definiujemy następująco:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]. \tag{3}$$

Zauważmy, że definicja (3) jest zgodna z przedstawioną wyżej regułą równoległoboku!

Niech c będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Mnożenie wektora przez liczbę definiujemy jako

$$c \cdot \mathbf{a} = c \cdot [a_1, a_2] = [c \cdot a_1, c \cdot a_2]. \tag{4}$$

Zauważmy, że wektory $\mathbf{a}$ i $c \cdot \mathbf{a}$ są równoległe.

Przykład 2

Niech $\mathbf{a} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [-2, 3]$. Obliczmy $2\mathbf{a}$ oraz $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} &= 2 \cdot [1, 2] = [2 \cdot 1, 2 \cdot 2] = [2, 4]. && \text{(5a)} \\ 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3 \cdot [1, 2] - 2 \cdot [-2, 3] \\ &= [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] + [(-2) \cdot (-2), (-2) \cdot 3] \\ &= [3, 6] + [4, -6] = [3 + 4, 6 - 6] = [7, 0]. && \text{(5b)} \end{aligned}$$

Długość wektora swobodnego

Długością wektora swobodnego $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ jest liczba

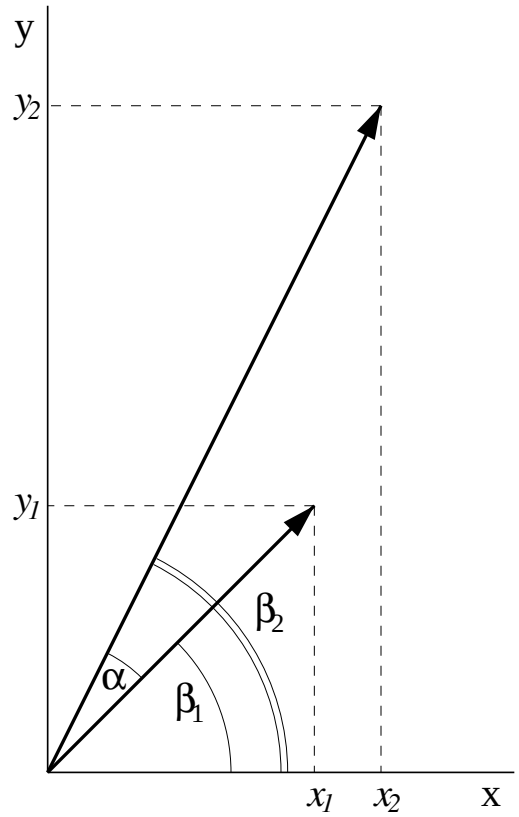
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{6}$$

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwu niezerowych wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ tworzących kąt α, definiuje się jako

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \alpha. \tag{7}$$

Obliczanie kąta pomiędzy wektorami może być kłopotliwe, dlatego też w praktyce postępujemy inaczej. Rozważmy konstrukcję zaprezentowaną na Rysunku.



Dwa pokazane na rysunku wektory — oznaczmy je odpowiednio $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ — tworzą kąt α. Kąt ten jest różnicą kątów β_2, β_1, jaki wektory $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1$ tworzą z osią OX. Zatem

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \cos\alpha = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \cos(\beta_2 - \beta_1)$$
$$= \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot (\cos\beta_2 \cos\beta_1 + \sin\beta_2 \sin\beta_1)$$
$$= \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \left(\frac{x_2}{\|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{x_1}{\|\mathbf{x}_1\|} + \frac{y_2}{\|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{y_1}{\|\mathbf{x}_1\|} \right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, \quad (8)$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na kosinus różnicy kątów i z definicji funkcji trygonometrycznych.

Widzimy, że *iloczyn skararny dwu wektorów równa się sumie iloczynów składowych tych wektorów*!

Przykład 3

Niech $\mathbf{a} = [-3, 2]$, $\mathbf{b} = [1, 4]$. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = [-3, 2] \circ [1, 4] = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = -3 + 8 = 5$.

Przykład 4

Wykażemy, że kąt wpisany w okrąg i oparty na średnicy jest kątem prostym.

Punkty leżące na okręgu o środku w środku układu współrzędnych i o promieniu r spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Wprowadźmy układ współrzędnych taki, że jego środek pokrywa się ze środkiem okręgu, natomiast wybrana średnica zawarta jest w osi OX. Rozpatrujemy punkty $L(-r, 0)$, $A(x, y)$, $P(r, 0)$, gdzie punkt A leży na okręgu, a zatem $x^2 + y^2 = r^2$. Interesujący nas kąt zawarty jest pomiędzy wektorami $\overrightarrow{LA}$ oraz $\overrightarrow{AP}$. $\overrightarrow{LA} = [x - (-r), y - 0] = [x + r, y]$. $\overrightarrow{AP} = [r - x, 0 - y] = [r - x, -y]$. Obliczam $\overrightarrow{LA} \circ \overrightarrow{AP} = [x + r, y] \circ [r - x, -y] = (r + x) \cdot (r - x) + y \cdot (-y) = r^2 - x^2 - y^2 = r^2 - (x^2 + y^2) = r^2 - r^2 = 0$, co oznacza, że wektory te są prostopadłe.

Wektor kierunkowy prostej

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie ma postać

$$Ax + By + C = 0, \tag{9}$$

przy czym liczby A, B nie mnogą *jednocześnie* być równe zeru. Jeżeli $A = 0$, równanie (9) określa prostą równoległą do osi OX. Jeżeli $B = 0$, równanie to określa prostą równoległą do osi OY.

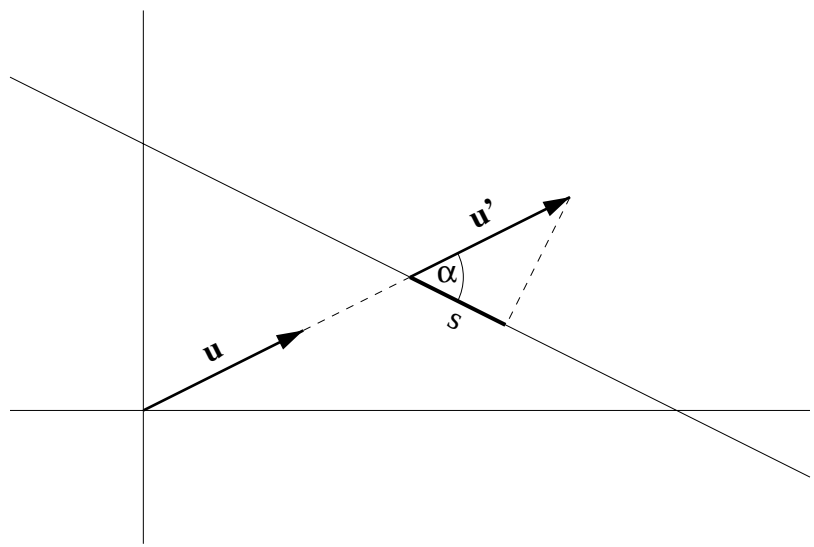
Wektor o współrzędnych $[B, -A]$ jest wektorem równoległym do prostej (9). Wektor ten nazywa się *wektorem kierunkowym* prostej. Dla $A = 0$ lub $B = 0$ powyższe twierdzenie jest oczywiste. Dla $A \neq 0 \neq B$ zauważmy, że punkty $P\left(0, -\frac{C}{B}\right)$, $Q\left(1, -\frac{A+C}{B}\right)$ leżą na prostej (9). Punkty te wyznaczają wektor

$$\overrightarrow{PQ} = \left[1 - 0, -\frac{A+C}{B} - \left(-\frac{C}{B}\right)\right] = \left[1, -\frac{A}{B}\right] = \frac{1}{B} \cdot [B, -A], \quad (10)$$

który jest równoległy do wektora $[B, -A]$.

Rzut wektora na prostą

Aby obliczyć rzut wektora swobodnego $\mathbf{u}$ na prostą o równaniu (9), postępujemy następująco (patrz rysunek):



1. Przesuwamy wektor $\mathbf{u}$ równolegle[†] tak, aby jego początek znalazł się na danej prostej. Przesunięty wektor oznaczamy $\mathbf{u}'$.
2. Rzut s wektora $\mathbf{u}'$ na prostą obliczamy jako $s = \|\mathbf{u}'\| \cdot \cos\alpha$, gdzie α jest kątem, jaki wektor $\mathbf{u}'$ tworzy z prostą.
3. Wielkość $\cos\alpha$ wyliczamy z iloczynu skalarnego wektora $\mathbf{u}'$ i wektora kierunkowego prostej.

Ostatecznie

$$s = \left\|\mathbf{u}'\right\| \cdot \cos\alpha = \left\|\mathbf{u}'\right\| \cdot \frac{\mathbf{u}' \circ [B, -A]}{\|\mathbf{u}'\| \cdot \|[B, -A]\|} = \frac{\mathbf{u}' \circ [B, -A]}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\mathbf{u} \circ [B, -A]}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11}$$

[†]Mówiąc bardziej precyzyjnie, wybieramy takiego reprezentanta wektora swobodnego $\mathbf{u}$, którego początek leży na danej prostej.

Wektory wielowymiarowe

O wektorach swobodnych na płaszczyźnie mówimy, że należą do przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Analogicznie definiuje się wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i, ogólnie, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli dane są dwa wektory $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, działania na nich definiujemy następująco:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= [a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_n] \\
&= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n] && (12) \\
c \cdot \mathbf{a} &= c \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [c \cdot a_1, c \cdot a_2, \ldots, c \cdot a_n],\ c \in \mathbb{R} && (13) \\
\|\mathbf{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} && (14) \\
\mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= [a_1, a_2, \ldots, a_n] \circ [b_1, b_2, \ldots, b_n] \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i && (15)
\end{aligned}
$$

Ostatnia z powyższych równości definiuje iloczyn skalarny. Zauważmy, że $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \circ \mathbf{a}}$. Proszę pamiętać, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest *liczbą*.

Jeżeli wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są niezerowe, kosinus kąta między nimi definiuje się jako

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \tag{16}$$

Wektory, dla których $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$, nazywa się wektorami wzajemnie prostopadłymi (ortogonalnymi). Uwaga: ponieważ iloczyn skalarny wektora zerowego z dowolnym innym wektorem znika, uznajemy, że wektor zerowy jest ortogonalny do wszystkich innych wektorów.

Przykład 5

Dane są dwa wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{x} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$, $\mathbf{y} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Znajdźmy kąt między tymi wektorami.

Zauważmy, że *także* w przestrzeni czterowymiarowej dwa niewspółliniowe wektory wyznaczają płaszczyznę dwuwymiarową.

Z definicji (☺) $\cos\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$. Obliczamy

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1 \tag{17a}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1 \tag{17b}$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 0 \tag{17c}$$

Zatem $\cos\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Wektory te są ortogonalne.

Grupa

Mówimy, że pewien zbiór G wraz z określonym w nim dwuargumentowym działaniem $\star$ tworzy grupę, jeżeli spełnione są następujące aksjomaty:

- Działanie jest wewnętrzne: $\forall a, b \in G : a \star b \in G$.
- Działanie jest łączne: $\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
- Istnieje element neutralny: $\exists e \in G \, \forall a \in G : a \star e = a$.
- Dla każdego elementu istnieje element odwrotny: $\forall a \in G \, \exists a' \in G : a \star a' = e$.

Jeśli dodatkowo $\forall a, b \in G : a \star b = b \star a$, grupę nazywam abelową (przemienną).

Przykład 6

Zbiór liczb rzeczywistych wraz z dodawaniem stanowi grupę. Zbiór liczb rzeczywistych bez zera (elementu neutralnego dodawania) wraz z mnożeniem stanowi grupę. Podobnie — zbiór liczb zespolonych.

Zbiór wektorów (swobodnych) w $\mathbb{R}^2$, a także w $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\ldots$, $\mathbb{R}^n$, $\ldots$ wraz z dodawaniem wektorów stanowi grupę.

Z geometrii znamy grupy translacji, jednokładności, obrotów, grupy symetrii wielokątów foremnych.

Permutacje

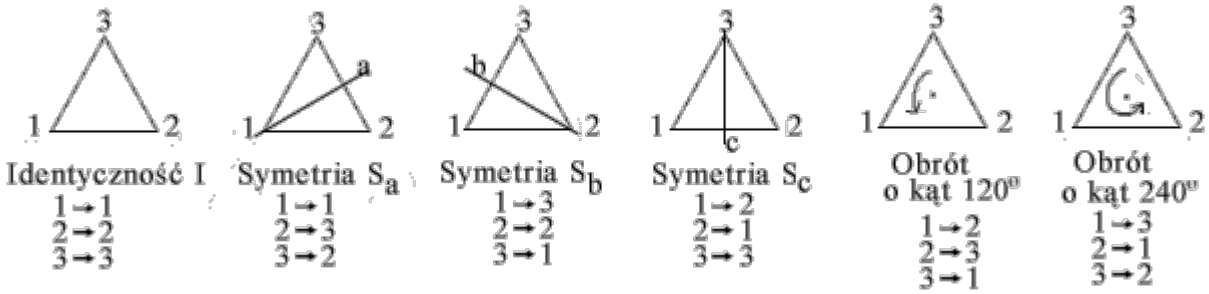
Dany jest ciąg N-elementowy $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Każdy sposób ustawienia wyrazów tego ciągu w innej kolejności nazywam *permutacją* wyrazów tego ciągu. Można powiedzieć, że permutacja to sposób przenumerowania wyrazów tego ciągu, czyli zastąpienia ciągu $\{1, 2, \ldots, N\}$ ciągiem $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$. Elementy ciągu $\{i_k\}_{k=1}^{N}$ muszą należeć do zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ i nie mogą się powtarzać.

Liczba permutacji ciągu n-elementowego wynosi $n!$: Na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów, na drugim $n-1$ elementów (jeden element jest już ustawiony na pierwszym miejscu), na trzecim $n-2$ elementów (dwa elementy już są ustawione na pierwszym i drugim miejscu) i tak dalej.

Permutacje tworzą grupę, zwaną grupą permutacji.

Przykład 7

Rozważmy grupę symetrii trójkąta równobocznego[‡]. Są to odbicia względem symetralnych poszczególnych boków, obroty wokół środka trójkąta o $2\pi/3$ i $4\pi/3$ oraz tożsamość. Jeśli ponumerujemy wierzchołki trójkąta, wszystkie te symetrie okazują się być permutacjami zbioru $\{1, 2, 3\}$, a grupa symetrii trójkąta równobocznego staje się w pewnym sensie równoważna grupie permutacji tego zbioru.



[‡]Przykład ten i rysunek pochodzą ze strony `http://www.mini.pw.edu.pl/miniwyklady/algebra/grupy/gr_permutacji/gr_permutacji.html`

Inwersje

Niech ciąg $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$ będzie ciągiem wartości pewnej permutacji. Mówimy, że w ciągu tym para k, l tworzy inwersję (nieporządek), jeżeli $i_k < i_l$ dla $k > l$. Przez *znak permutacji* rozumiem $(-1)^{\text{liczba inwersji}}$. Permutacje o znaku dodatnim nazywam parzystymi, permutacje o znaku ujemnym nieparzystymi.

Przykład 8

Rozważam permutacje ciągu $\{1, 2, 3\}$. Jest ich $3! = 6$.

Permutacjami parzystymi są $\{1, 2, 3\}$ (zero inwersji), $\{2, 3, 1\}$ (inwersje 1-2, 1-3) oraz $\{3, 1, 2\}$ (inwersje 1-3, 2-3).

Permutacjami nieparzystymi są $\{2, 1, 3\}$ (inwersja 1-2), $\{1, 3, 2\}$ (inwersja 2-3) oraz $\{3, 2, 1\}$ (inwersje 1-3, 1-2, 2-3).

Pierścień

Rozważamy zbiór R z określonymi na nim dwoma działaniami $+$ oraz $\cdot$, zwanymi, odpowiednio, dodawaniem i mnożeniem.

Jeżeli R wraz z dodawaniem $+$ jest grupą abelową, natomiast R wraz z mnożeniem $\cdot$ jest półgrupą (mnożenie jest wewnętrzne, łączne, nie zakłada się istnienia elementu neutralnego, a nawet jeśli on istnieje, nie zakłada się odwracalności mnożenia), a dodatkowo działania są rozdzielne:

- $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

strukturę tę nazywam pierścieniem. Jeżeli istnieje element neutralny dla mnożenia, mówimy o pierścieniu z jedynką. Jeżeli dodatkowo mnożenie jest przemienne, mówimy o pierścieniu przemiennym.

Przykład 9

Zbiór liczb całkowitych z dodawaniem i mnożeniem stanowi pierścień. Zbiór wielomianów stanowi pierścień. Są to pierścienie z jedynką.

Ciało

Pierścień przemienny z jedynką, w którym wszystkie elementy za wyjątkiem zera (elementu neutralnego dodawania) mają elementy odwrotne względem mnożenia, nazywam ciałem.

Przykład 10

Zbiory liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych wraz z dodawaniem i mnożeniem stanowią ciała.

Przestrzeń liniowa

Niech $\mathbb{K}$ będzie pewnym ciałem liczbowym[§], a V pewnym zbiorem. Mówimy, że V tworzy przestrzeń liniową (przestrzeń wektorową) nad ciałem $\mathbb{K}$, jeżeli określone są dwa działania: mnożenie wektora (elementu V) przez skalar (element $\mathbb{K}$) oraz dodawanie wektorów, przy czym:

- Dodawanie wektorów jest łączne: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- Dodawanie wektorów jest przemienne: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Istnieje element neutralny względem dodawania wektorów: $\exists \mathbf{0} \in V \; \forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- Każdy wektor ma wektor przeciwny: $\forall \mathbf{v} \in V \; \exists \mathbf{v}' \in V : \mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$
- Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów: $\forall a \in \mathbb{K} \; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{u}$

[§]W praktyce interesujące są przypadki $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania skalarów: $\forall a, b \in \mathbb{K}\, \forall \mathbf{v} \in V : (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$
- Mnożenie wektora przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów: $\forall a, b \in \mathbb{K}\, \forall \mathbf{v} \in V : a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$
- Jeżeli 1 jest jedynką (elementem neutralnym ciała $\mathbb{K}$ względem mnożenia), to $\forall \mathbf{v} \in V : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Przykład 11

Przestrzenie $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$, ... stanowią przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$, i podobnie dla przestrzeni zespolonych.

Zbiór wielomianów stanowi przestrzeń liniową (wielomiany są “wektorami niegeometrycznymi”).

Kombinacja liniowa

Wektor postaci $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ oraz $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, nazywam kombinacją liniową tych wektorów.

Mówiąc niezbyt formalnie, sens przestrzeni liniowej jest taki, że każda kombinacja liniowa wektorów z tej przestrzeni sama jest wektorem z tej przestrzeni (należy do tej przestrzeni).

Wymiar i baza przestrzeni

Mówimy, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ są liniowo niezależne, jeżeli ich kombinacja liniowa

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m \tag{18}$$

równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczyniki kombinacji jednocześnie znikają: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Jeżeli kombinacja liniowa może znikać gdy nie wszystkie współczynniki kombinacji się zerują, wektory nazywam liniowo zależnymi.

Mówimy, że przestrzeń liniowa jest n-wymiarowa, jeśli istnieje w niej n liniowo niezależnych wektorów, a każde $n+1$ wektorów jest liniowo zależne. Wówczas $\dim V = n$.

Bazą przestrzeli liniowej V o wymiarze n nazywam *każdy* ciąg n liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. Każdy wektor $\mathbf{x} \in V$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{19}$$

Jeżeli w przestrzeni określona jest struktura iloczynu skalarnego, bazę, której elementy są wzajemnie ortogonalne, nazywam bazą ortogonalną. Jeżeli dodatkowo długość każdego wektora bazowego wynosi jeden, bazę taką nazywam ortonormalną: $\forall i, j = 1, \ldots, n : \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Przykład 12

Bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są wektory $[1, 0]$, $[0, 1]$. Jest to baza ortonormalna. Inną bazą stanowią wektory $[1, 0]$, $[1, 1]$. Ta baza nie jest ortogonalna.

Rozważmy zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n. W tej przestrzeni bazą są funkcje $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Wymiar takiej przestrzeni wynosi $n+1$.

Podprzestrzeń liniowa

Niech V będzie przestrzenią liniową i niech $U \subset V$. Jeżeli U jest przestrzenią liniową z uwagi na te same działania, co V, mówimy, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Przykład 13

$\mathbb{R}^3$ stanowi przestrzeń liniową. Zbiór wektorów postaci $[x, y, 0]$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni; można ją utożsamiać z przestrzenią $\mathbb{R}^2$.