Fizyka dla firm — Matematyka

9. Ciągi

Indukcja matematyczna

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

3 listopada 2022

Ciągi

Mówiąc nieformalnie, ciąg to sposób ponumerowania jakichś obiektów.

Mówiąc formalnie, ciąg to odwzorowanie (pod)zbioru liczb naturalnych w jakiś inny zbiór. Jeśli ten zbiór jest zbiorem liczbowym, mówimy o ciągu liczbowym.

Zazwyczaj początkowemu wyrazowi ciągu przypisuje się numer 0 lub 1.

Ciąg *skończony*, o wyrazach od a_1 do a_N oznacza się $\{a_n\}_{n=1}^{N}$. Ciąg *nieskończony*, o początkowym wyrazie a_1, oznacza się $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Oczywiście zamiast litery "a" można użyć dowolnej innej litery.

Przykłady

$a_n = 2n$; $a_n = n^2$; $a_n = \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Pytanie: Czy wszystkie powyższe ciągi można numerować od 0?

Uwaga: zamiast podawać jawny wzór na n-ty wyraz ciągu, ciągi można także definiować rekurencyjnie, podając wyraz początkowy i sposób obliczania kolejnego wyrazu z wyrazów poprzednich, na przykład

$$\begin{cases} a_1 = 1\,, \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}\,, \quad n = 2, 3, \dots\,. \end{cases} \tag{1}$$

Ciągi monotoniczne

Dany jest ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jeżeli

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geqslant a_n \tag{2}$$

ciąg ten nazywamy rosnącym. Jeżeli natomiast

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leqslant a_n \tag{3}$$

ciąg nazywamy malejącym. Jeśli nierówności w powyższych wyrażeniach są silne, mówimy, odpowiednio, o ciągu silnie (lub: ściśle) rosnącym/malejącym.

Definicje te łatwo uogólnić na przypadek ciągów skończonych.

Jeżeli

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \tag{4}$$

ciąg nazywamy ciągiem stałym.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny to ciąg, który spełnia

$$\exists r \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + r \tag{5}$$

Łatwo udowodnić następujące wzory (S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów):

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)r && \text{(6a)}\\
a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad n \geqslant 2 && \text{(6b)}\\
S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} && \text{(6c)}\\
S_n &= n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} && \text{(6d)}
\end{aligned}
$$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometyczny to ciąg, który spełnia

$$\exists q \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = q \cdot a_n \tag{7}$$

Łatwo udowodnić następujące wzory (S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów):

$$\begin{aligned} a_n &= q^{n-1} \cdot a_1 && \text{(8a)} \\ a_n &= \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad n \geqslant 2 && \text{(8b)} \\ S_n &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1 && \text{(8c)} \end{aligned}$$

Z ostatniego wyrażenia wynika, że jeżeli $|q| < 1$, suma wszystkich (nieskończenie wielu) wyrazów ciągu geometrycznego istnieje, jest skończona i wynosi $S_\infty = a_1/(1-q)$.

Przykład

Czemu równa się liczba o rozwinięciu dziesiętnym składającym się z nieskończenie wielu cyfr 9?

$$x = 0.\underbrace{9999999999999999999\ldots}_{\text{nieskończenie wiele dziewiątek}} \tag{9}$$

Zauważmy, że ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby x

$$x_1 = 0.9 \tag{10a}$$
$$x_2 = 0.99 \tag{10b}$$
$$x_3 = 0.999 \tag{10c}$$
$$x_4 = 0.9999 \tag{10d}$$
$$\ldots$$

stanowi ciąg sum początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o $a_1 = 0.9$ i $q = 0.1$:

$$x_1 = a_1 = 0.9 \tag{11a}$$

$$a_2 = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + a_2 = 0.9 + 0.09 = 0.99 \tag{11b}$$

$$a_3 = 0.1 \cdot 0.09 = 0.009 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_2 + a_3 = 0.99 + 0.009 = 0.999 \tag{11c}$$

$$a_4 = 0.1 \cdot 0.009 = 0.0009 \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_3 + a_4 = 0.999 + 0.0009 = 0.9999 \tag{11d}$$

$$\ldots$$

Zatem rozwinięcie dziesiętne liczby x do n cyfr

$$x_n = 0.\underbrace{9999999999}_{n \text{ dziewiątek}} \tag{12}$$

jest równe

$$x_n = 0.9 \cdot \frac{1 - (0.1)^n}{1 - 0.1} = 0.9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{0.9} = 1 - \frac{1}{10^n} \tag{13}$$

Dla $n \to \infty$ ostatni wyraz znika i $x = x_\infty = 1$.

Ciąg Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest następująco:

$$f_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ f_{n-2} + f_{n-1} & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{14}$$

Początkowe wyrazy ciągu Fibonacciego wynoszą $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \dots\}$. Kolejne wyrazy tego ciągu nazywa się liczbami Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego ma duże znaczenie w kombinatoryce, geometrii (sic!), obliczeniach numerycznych i różnych zagadnieniach “teoretycznych”.

Symbol sumy, $\sum$

Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Do określenia sum wyrazów tego szeregu używa się symbolu $\sum$.

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \text{ — suma wyrazów do } a_1 \text{ do } a_N.$$

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{l=2}^{7} b_l = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$$

Uwagi

1. Wskaźnik sumowania jest “martwy”, wskaźnik sumowania jest tylko oznaczeniem, można go przemianować:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \equiv \sum_{l=1}^{N} a_l = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N \tag{15}$$

2. Sumę można rozbić na części:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \equiv \left(\sum_{k=1}^{M} a_k\right) + \left(\sum_{k=M+1}^{N} a_k\right), \quad M < N \tag{16}$$

3. Z sumy można wydzielić jakieś wyrazy, na przykład pierwszy lub ostatni:

$$\sum_{l=1}^{N} b_l = b_1 + \left(\sum_{l=2}^{N-1} b_l\right) + b_N \tag{17}$$

4. Wskaźnik można “przesunąć”:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \equiv \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} \tag{18}$$

Zwróćmy uwagę, że po rozwinięciu wyrażeń sumowanych, po obu stronach (18) pojawią się **dokładnie te same wyrazy**.

Iloczyn, $\prod$

Podobnie można zdefiniować iloczyn wyrazów jakiegoś ciągu:

$$\prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{N-1} \cdot a_N \tag{19}$$

Sumy i iloczyny nieskończone

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieskończony, można definiować sumy i iloczyny nieskończone:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

$$* * *$$

Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{20}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{21}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{22}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{23}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{24}$$

Czy te wzory można jakoś uogólnić?

Silnia

Dla $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{25}$$

Dla $n > 1 : n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, $4! = 4 \cdot 6 = 24$, $5! = 5 \cdot 24 = 120$, $6! = 6 \cdot 120 = 720, \dots$

Symbol Newtona

Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{26}$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$
$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1$$
$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Trójkąt Pascala

Wartości symbolu Newtona można odczytać z tablicy, zwanej trójkątem Pascala

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

. . . .

Na brzegach zawsze są jedynki. Począwszy od wiersza $n = 2$, wewnętrzne pozycje są sumami elementów stojących nad nimi.

Własności symbolu Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \tag{27}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad k < n\,, \tag{28}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n+1}\,. \tag{29}$$

Dla przykładu sprawdźmy równość (27):

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{30}$$

Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \,. \tag{31}$$

Ostatnia równość wynika wprost z (27).

Przykłady

Łatwo sprawdzić, że wzory skróconego mnożenia $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ są zgodne ze wzorem (31).

Korzystając z trójkąta Pascala, odczytajmy ze wzoru dwumianowego Newtona (31) wyrażenie na $(a+b)^5$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k \\
&= \binom{5}{0} a^{5-0} b^0 + \binom{5}{1} a^{5-1} b^1 + \binom{5}{2} a^{5-2} b^2 + \binom{5}{3} a^{5-3} b^3 \\
&+ \binom{5}{4} a^{5-4} b^4 + \binom{5}{5} a^{5-5} b^5 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 \,. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna jest treścią jednego z aksjomatów teorii liczb naturalnych.

Jeżeli pewna teza

- zachodzi dla jakiegoś $n_0 \in \mathbb{N}$
- z tego, że teza zachodzi dla jakiegoś n wynika, że teza ta zachodzi dla $n+1$

wówczas teza ta zachodzi dla wszystkich naturalnych $n \geqslant n_0$.

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n_0)) \wedge (\forall n : \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \forall n \geqslant n_0 : \mathcal{P}(n)$$

W powyższym wyrażeniu pierwszy duży kwantyfikator **nie** mówi, że dla każdego n zachodzi $\mathcal{P}(n)$, tylko że dla każdego n — każdego, czyli dowolnego, czyli takiego, o którym nie czynimy żadnych dodatkowych założeń — zachodzi implikacja $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$; ta zaś implikacja stanowi część poprzednika szerszej implikacji. A więc, *jeżeli* dla każdego, czyli dowolnego, w żaden inny sposób nie wyspecyfikowanego n, zachodzi ta implikacja, to itd.

Indukcja matematyczna jest jak wchodzenie po drabinie.

1. Musimy stanąć na najniższym szczeblu.
2. Jeżeli wiemy, że z *jakiegoś* szczebla potrafimy wejść na *następny*,

to wiemy, że potrafimy przejść przez całą drabinę: z pierwszego szczebla możemy przejść na drugi, z drugiego na trzeci i tak dalej, aż do nieskończoności.

Przykład 1

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{33a}$$

Dowód: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k = 1$,
$P = 1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{33b}$$

co kończy dowód, gdyż otrzymaliśmy wyrażenie postaci (33a) z n zastąpionym przez $n+1$.

Przykład 2

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{34a}$$

<u>Dowód</u>: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$,
$P = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 2 \cdot 3/6 = 6/6 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \dots
\end{aligned}
$$

Łatwo sprawdzić, że ostatnie wyrażenie w nawiasie $(2n^2 + 7n + 6) = (n+2)(2n+3) = (n+2)(2(n+1)+1)$. Zatem

$$
\dots = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}, \tag{34b}
$$

co kończy dowód.

Przykład 3

Niech symbol $a|b$ oznacza, że liczba całkowita a jest podzielnikiem liczby całkowitej b. Udowodnij, że dla $n \geqslant 0$

$$2|\left(n^2 - n\right) \tag{35a}$$

Dowód: Dla $n = 1$, $n^2 - n = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, co jest podzielne przez 2. Przyjmijmy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^2 - n = 2s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^2-(n+1) = n^2+2n+1-n-1 = n^2-n+2n = 2s+2n = 2(s+n) \tag{35b}$$

co jest podzielne przez 2.

Przykład 4

Udowodnij, że

$$3|\left(n^3 - n\right) \tag{36a}$$

<u>Dowód</u>: Pierwszy krok dowodu indukcyjnego wygląda tak samo, jak w przykładzie poprzednim, więc go pominiemy. Przyjmujemy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^3 - n = 3s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3s + 3n^2 + 3n = 3(s + n^2 + n)\end{aligned} \tag{36b}$$

Przykład 5

Dany jest ciąg Fibonacciego: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Udowodnij, że

$$2 | a_{3n} \tag{37a}$$

Dowód: Jak łatwo wyliczyć, $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, a więc teza dla $n = 1$ zachodzi. Zakładamy, że zachodzi ona dla jakiegoś $n \geqslant 1$, $a_{3n} = 2s$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_{3(n+1)} &= a_{3n+3} = a_{3n+2} + a_{3n+1} = \underbrace{a_{3n+1} + a_{3n}}_{a_{3n+2}} + a_{3n+1} \\ &= 2a_{3n+1} + a_{3n} = 2a_{3n+1} + 2s = 2(a_{3n+1} + s) \end{aligned} \tag{37b}$$

Przykład 6

Nierówność Bernoulli'ego

Udowodnij, że dla $n \geqslant 0$, $a > -1$

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \tag{38a}$$

Dowód: Zauważmy, że ponieważ $a > -1$, liczba podnoszona do potęgi po lewej stronie (38a) jest większa od zera.

Dla $n = 0$ mamy $L = (1+a)^0 = 1$, $P = 1 + 0 \cdot a = 1$, $L = P$.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = \\ 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a\end{aligned} \tag{38b}$$

co kończy dowód.

Przykład 7

Wzór dwumianowy Newtona

Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{39a}$$

(wzór dwumianowy Newtona).

Dowód: Udowodnimy tylko pierwszą z powyższych nierówności; dowód drugiej będzie w tej sytuacji trywialny. Dodówd przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla $n = 0$, lewa i prawa strona dają jeden, a więc teza zachodzi. Przyjmujemy założenie indukcyjne, iż teza (39a) zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Przekształcamy wyrażenie

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} = \dots
\end{aligned}
\tag{39b}
$$

Jak widać, wydzieliliśmy początkowy (zerowy) i ostatni ($n+1$) wyraz przekształcanej sumy. W pozostałej części “niepokoi” nas człon $n+1$ w górnym poziomie symbolu Newtona. Aby można się go było pozbyć, zaczniemy od *przenumerowania* wyrazów szeregu: zamiast sumować po k od 1 do n, możemy sumować po zmiennej l od 0 do $n-1$. Innymi słowy, przyjmujemy, że $k = l + 1$, oraz l przebiega zakres od 0 do $n-1$. **Zmiana górnej**

granicy sumowania nie zmienia wyrażeń zawierających n w sumowanym wyrażeniu! Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\ldots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} a^{l+1} b^{n+1-(l+1)} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \left[\binom{n}{l} + \binom{n}{l+1}\right] a^{l+1} b^{n-l} = \ldots \end{aligned} \tag{39c}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości (28). Otrzymujemy dalej

$$\ldots = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} a^{l+1} b^{n-l} \tag{39d}$$

W drugiej z powyższych sum ponownie zmieniamy sposób numerowania wyrazów — przyjmujemy, że $l = k - 1$, gdzie k przebiega zakres od 0 do n (jest to powrót do pierwotnego sposobu numerowania). Zatem

$$
\begin{aligned}
\ldots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-(k-1)} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + a^n \right)} + b \underbrace{\left(b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)} = \ldots
\end{aligned}
\tag{39e}
$$

gdzie najpierw wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed znaki sumy, a później wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed nawias. Zauważmy, że wyraz

a^n jest “brakującym”, n-tym wyrazem pierwszej sumy. Podobnie b^n jest “brakującym”, zerowym wyrazem drugiej sumy. Zatem

$$
\begin{aligned}
\ldots &= a \cdot \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \cdot (a+b)^n + b \cdot (a+b)^n = (a+b)^{n+1} \qquad \text{(39f)}
\end{aligned}
$$

co kończy dowód.

Kolejne przykłady

Następujące tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \,, \tag{40a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \,, \quad n \geqslant 1 \tag{40b}$$

także można udowodnić indukcyjnie. Skoro jednak mamy już udowodniony wzór dwumianowy Newtona (39a), możemy je udowodnić bardzo prosto, w pierwszym przypadku podstawiając $a = 1$, $b = 1$, w drugim $a = 1$, $b = -1$ ☺