Fizyka dla firm — Matematyka

8. Równania trygonometryczne — przykłady

P. F. Góra

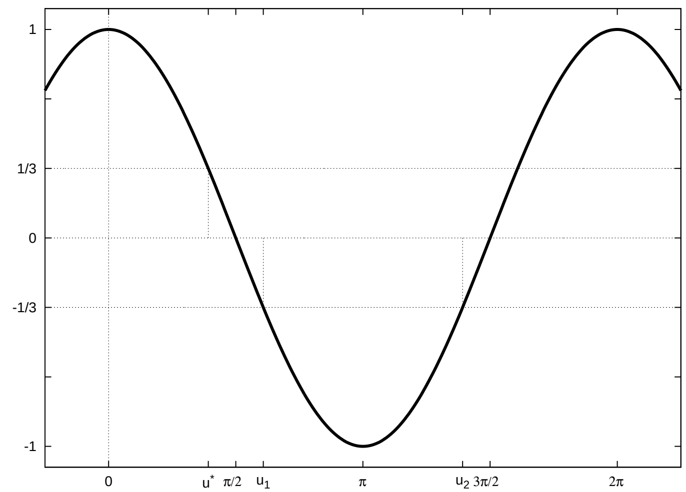
https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

27 października 2022

Przykład 1

$$\cos 2x = -\frac{1}{3} \tag{1}$$

Odpowiedź: Oznaczmy $2x = u$. Mamy zatem równanie $\cos u = -\frac{1}{3}$. Spójrzmy na poniższy rysunek:



Widać, że równanie będzie miało *dwa* rozwiązania w podstawowym okresie; oznaczmy je u_1,u_2. Leżą one, odpowiednio, w drugiej i trzeciej ćwiartce (tam, gdzie kosinus jest ujemny). Przede wszystkim znajdźmy zależność pomiędzy tymi rozwiązaniami. Wykres funkcji $\cos u$ jest symetryczny względem prostej $u = \pi$. Wynika z tego, że odległość od u_2 do $\frac{3\pi}{2}$ musi być taka sama, jak odległość od u_1 do $\frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} - u_2 &= u_1 - \frac{\pi}{2} \\ u_2 &= 2\pi - u_1 \end{aligned}$$

Wystarczy zatem znaleźć u_1. Jak wyrazić u_1 przez kąt pierwszej ćwiartki? Wiemy, że $\cos u_1 = -\frac{1}{3}$. Istnieje taki kąt pierwszej ćwiatki, który oznaczam u^*, że $\cos u^* = \frac{1}{3}$ (patrz rysunek). Korzystam z innej symetrii wykresu funkcji kosinus: punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ jest środkiem symetrii wykresu (pamiętajmy, że wykres ciągnie się od $-\infty$ do $+\infty$), a zatem odległość od $\frac{\pi}{2}$ do

u_1 jest taka sama, jak odległość od u^* do $\frac{\pi}{2}$. Wobec tego

$$\begin{aligned} u_1 - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} - u^* \\ u_1 &= \pi - u^* \\ u_2 &= 2\pi - u_1 = 2\pi - (\pi - u^*) = \pi + u^* \end{aligned}$$

Możemy skrótowo zapisać, że $u_{1,2} = \pi \mp u^*$.

Zauważmy teraz, że

$$u^* = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) .$$

Wynika to **wprost z definicji funkcji arkus kosinus**: u^* jest takim kątem, że $\cos u^* = \frac{1}{3}$.

Trzeba jeszcze uwzględnić okresowość funkcji kosinus i wrócić do pierwotnych zmiennych:

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + 2k\pi \text{ lub } u = u_2 + 2k\pi \\
u &= \pi \mp \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\
2x &= \pi \mp \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\
x &= \frac{\pi}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi
\end{aligned}
$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

$$\sin x + \cos x = 0 \tag{2}$$

Odpowiedź: Zauważmy, że dla kątów, dla których $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$ i równanie(2) nie jest spełnione. Możemy więc założyć, że $\cos x \neq 0$, a zatem wolno równanie (2) podzielić stronami przez $\cos x$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + 1 &= 0 \\ \operatorname{tg} x &= -1 \\ x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nieparzystości funkcji tangens.

Przykład 3

$$2\sin^3 x = -\sqrt{3}\sin^2 x \tag{3}$$

Odpowiedź: Albo $\sin^2 x = 0$, albo $\sin^2 x \neq 0$. Pierwsza z tych możliwości daje $\sin x = 0$, czyli $x = k\pi$. Jeżeli $\sin^2 x \neq 0$, dzielimy obustronnie przez $\sin^2 x$ i otrzymujemy

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania, leżące, odpowiednio, w trzeciej i czwartej ćwiartce okresu, co daje, odpowiednio, $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ oraz $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

Przykład 4

$$\sin^3 3x - 3\sin 3x = 0 \tag{4}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} \sin 3x \cdot (\sin^2 x - 3) &= 0 \\ \sin 3x &= 0 \\ 3x &= k\pi \\ x &= \frac{k\pi}{3} \end{aligned}$$

gdyż $\forall x:\ \sin^2 x - 3 \neq 0$.

Przykład 5

$$\sqrt{3}\cos x = -\sin^2 x \tag{5}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x &= -(1-\cos^2 x) \\ \cos^2 x - \sqrt{3}\cos x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$t = \cos x$

$$\begin{aligned} t^2 - \sqrt{3}t - 1 &= 0 \\ t &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Drugie z rozwiązań $t_2 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} > 1$, więc je odrzucamy.

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} < 0$$

Postępując jak w zadaniu (1) stwierdzamy, że

$$x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right) + (2k+1)\pi\,.$$

Przykład 6

$$\frac{1}{\cos x} + \cos x = \cos^2 x + 1 \tag{6}$$

Odpowiedź: Przede wszystkim zauważmy, że $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\begin{aligned}
1 + \cos^2 x &= \cos^3 x + \cos x \\
\cos^3 x - \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\
\cos x \cdot (1 + \cos^2 x) - (1 + \cos^2 x) &= 0 \\
(\cos x - 1)(1 + \cos^2 x) &= 0 \\
\cos x - 1 &= 0 \\
\cos x &= 1 \\
x &= 2k\pi\,,
\end{aligned}$$

gdyż $\forall x\colon\ 1 + \cos^2 x > 0$.

Przykład 7

$$\sin^4 8x + \cos^4 8x = 1 \tag{7}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}
\sin^4 8x + 2\sin^2 8x \cos^2 8x + \cos^4 8x - 2\sin^2 8x \cos^2 8x &= 1 \\
(\sin^2 8x + \cos^2 8x)^2 - 2\sin^2 8x \cos^2 8x &= 1 \\
1 - 2\sin^2 8x \cos^2 8x &= 1 \\
-2\sin^2 8x \cos^2 8x &= 0 \\
4\sin^2 8x \cos^2 8x &= 0 \\
(2\sin 8x \cos 8x)^2 &= 0 \\
\sin^2 16x &= 0 \\
\sin 16x &= 0 \\
16x &= k\pi \\
x &= k\pi/16
\end{aligned}$$