Fizyka dla firm — Matematyka

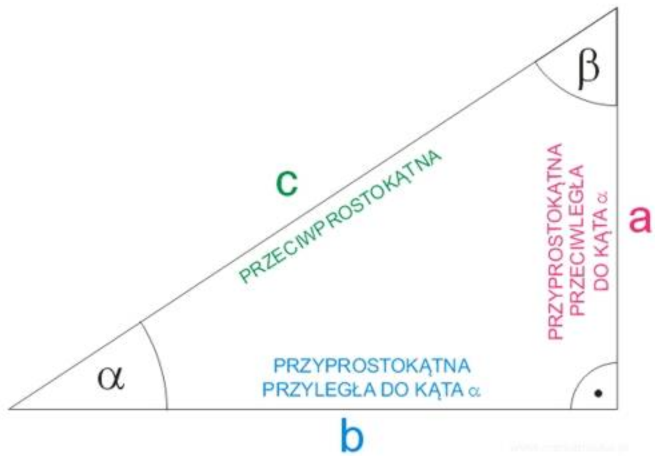
7. Trygonometria

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

24 października 2022

Funkcje trygonometryczne



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Zamiast oznaczeń tg , ctg używa się niekiedy oznaczeń anglosaskich `tan`, `cot`.

Podstawowe tożsamości

Z twierdzenia Pitagorasa

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

Obowiązuje zatem "jedynka trygonometryczna"

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$

Zapis "$\sin^2\alpha$" interpretujemy jako "$(\sin\alpha)^2$"; podobnie z innymi funkcjami.

Oczywiste są także trzy inne tożsamości:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{2a}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{2b}$$

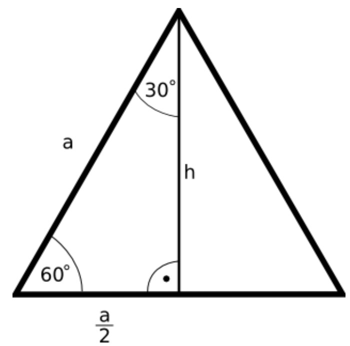
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{2c}$$

Funkcje trygonometryczne $\pi/4$

Rozważając kwadrat o boku jednostkowym, którego przekątna ma długość $\sqrt{2}$, widzimy, że

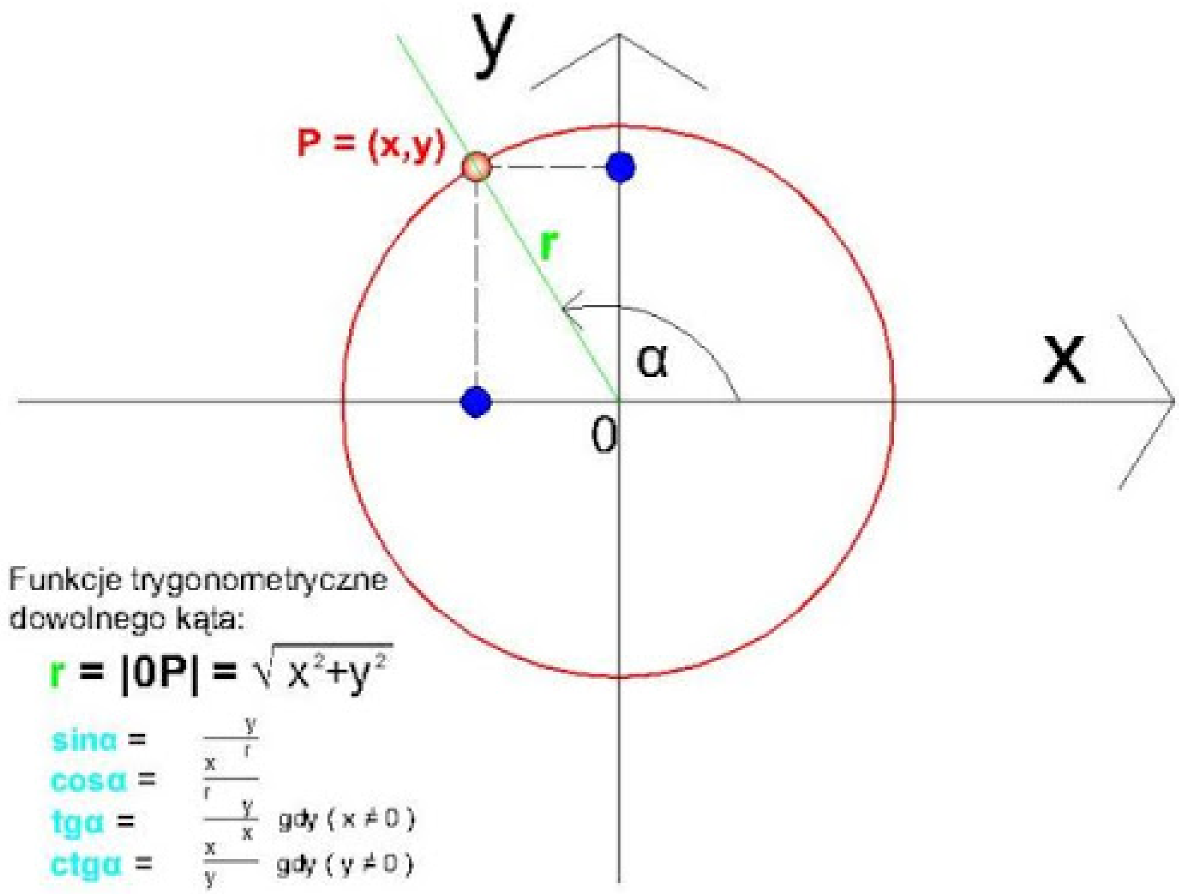
$$
\begin{aligned}
\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Funkcje trygonometryczne $\pi/3$, $\pi/6$



$$
\begin{aligned}
\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\
\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\
\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



Okresowość funkcji trygonometrycznych

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; k \in \mathbb{Z}:$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \tag{3a}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \tag{3b}$$

$$\mathrm{tg}\,(x + k\pi) = \mathrm{tg}\,x \tag{3c}$$

$$\mathrm{ctg}\,(x + k\pi) = \mathrm{ctg}\,x \tag{3d}$$

Uwaga: argumenty ujemne odpowiadają kątom mierzonym *zgodnie* z ruchem wskazówek zegara.

Parzystość funkcji trygonometrycznych

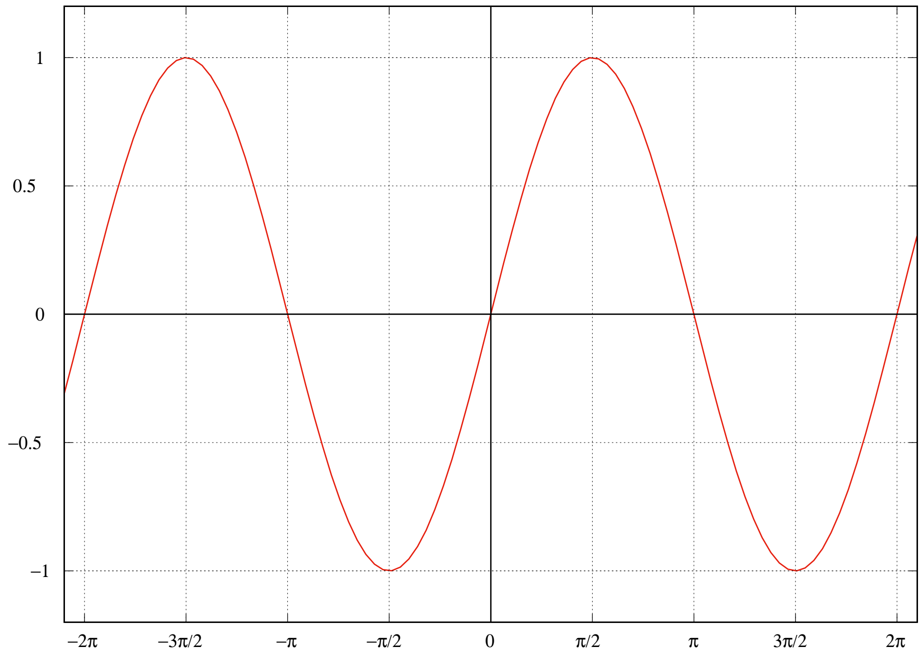
$$\begin{aligned} \sin(-x) = -\sin x\,, \quad \cos(-x) = \cos x\,, \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\,, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Znaki funkcji trygonometrycznych

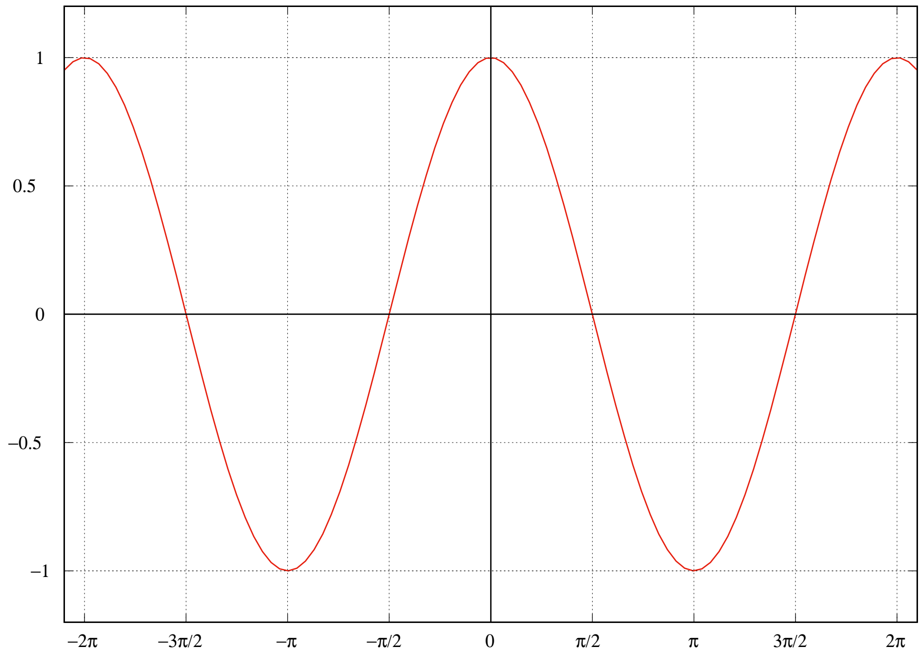
W pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i kotanges, a w czwartej kosinus.

☺

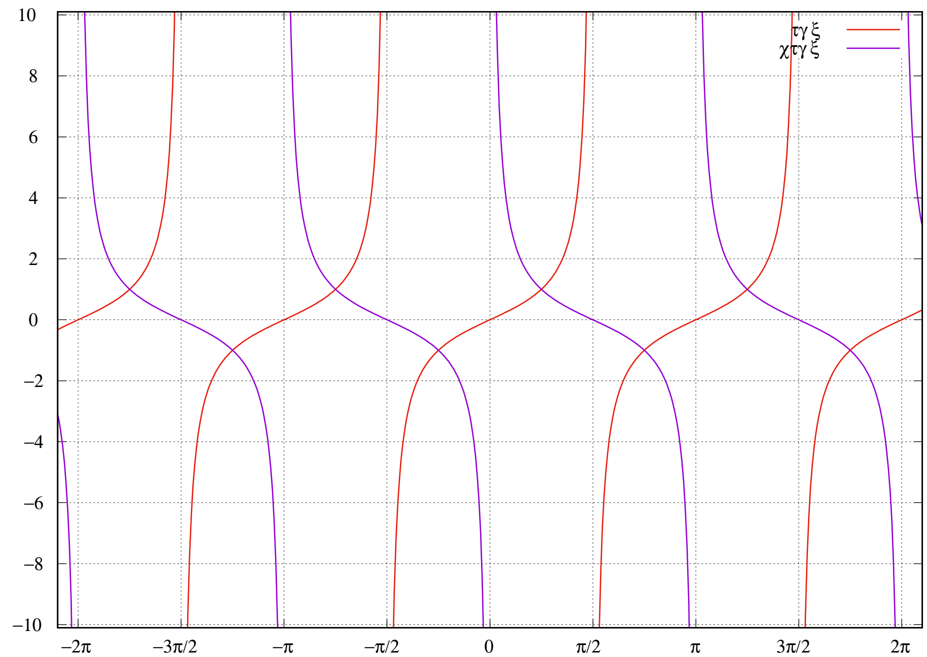
Wykres funkcji sinus



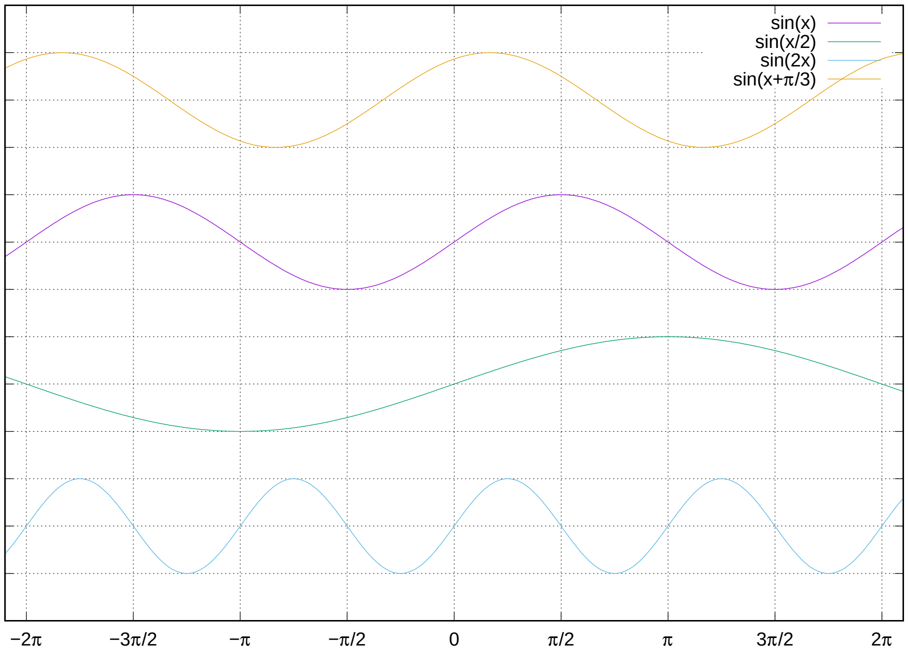
Wykres funkcji kosinus



Wykresy funkcji tangens i kotangens



Zmiana częstotliwości i przesunięcie w fazie



Wzory redukcyjne

$$\sin(x+\pi/2) = \cos x\,, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x\,,$$
$$\sin(x+3\pi/2) = -\cos x\,, \tag{5a}$$
$$\cos(x+\pi/2) = -\sin x\,, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x\,,$$
$$\cos(x+3\pi/2) = \sin x\,. \tag{5b}$$

Podobnie dla tg, ctg. Nieparzysta wielokrotność $\pi/2$ — funkcja zmienia się na kofunkcję, parzysta wielokrotność $\pi/2$ — funkcja się nie zmienia. Znak ustalamy zgodnie ze znakiem lewej strony zakładając, że x należy do pierwszej ćwiartki.

Korzystając z powyższych wzorów redukcyjnych i parzystości funkcji trygonometrycznych, można wyprowadzać wzory postaci $\sin(k\pi/2 - x)\,,\ k \in \mathbb{Z}$. Na przykład

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 + (-x)) = \cos(-x) = \cos x\,, \tag{6a}$$

$$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + (-x)) = -\cos(-x) = -\cos x\,. \tag{6b}$$

Wzory na funkcje kąta podwojonego

Korzystamy ze wzoru de Moivre'a:

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x) \tag{7a}$$

z drugiej strony

$$\begin{aligned} e^{2ix} &= \left(e^{ix}\right)^2 = (\cos x + i\sin x)^2 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x \end{aligned} \tag{7b}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone (7a) i (7b) widzimy, że

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \tag{8a}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{8b}$$

Wzory na funkcje sumy i różnicy kątów

Powyższe wzory można uogólnić:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{9a}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{9b}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{9c}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{9d}$$

Wzorów tych można używać do udowadniania (sprawdzania) rozmaitych tożsamości trygnonometrycznych.

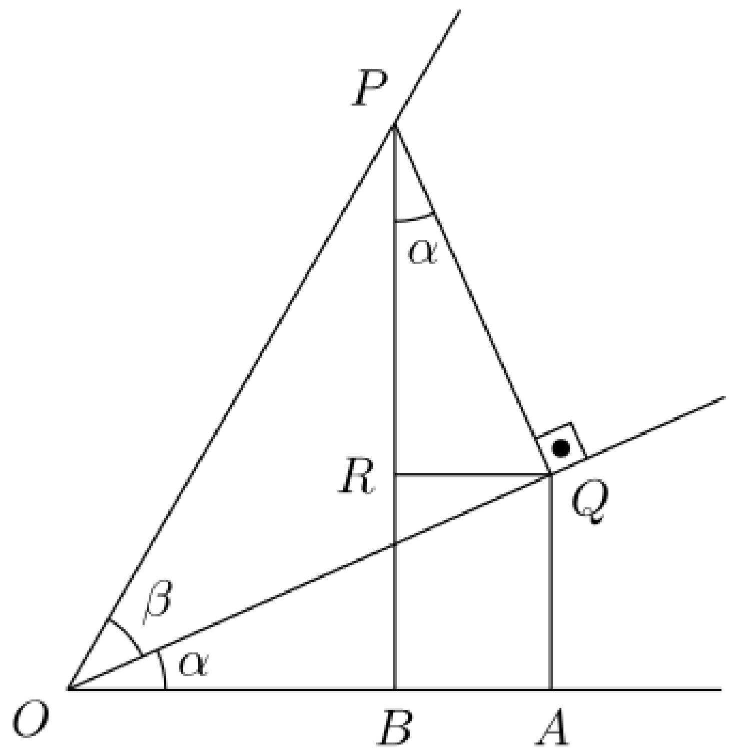
Przykłady

$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)\,\sin(\alpha-\beta) \\
&= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\,(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\
&= \sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta \\
&= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta \\
&= \sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha-\sin^2\beta\,.
\end{aligned}
\tag{10a}
$$

$$
\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z}{\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} z} = \frac{\dfrac{\sin y}{\cos y}+\dfrac{\sin z}{\cos z}}{\dfrac{\cos y}{\sin y}+\dfrac{\cos z}{\sin z}} = \frac{\dfrac{1}{\cos y\cos z}}{\dfrac{1}{\sin y\sin z}} = \frac{\sin y\sin z}{\cos y\cos z} = \operatorname{tg} y\operatorname{tg} z
\tag{10b}
$$

Wyprowadzenie dla kątów pierwszej ćwiartki

Rozpatrzmy rysunek:



I.

Zauważmy, że oba kąty oznaczone na rysunku przez α, są równe.

Istotnie, $\measuredangle OQA = \pi/2 - \alpha$, wobec czego $\measuredangle OQR = \alpha$. Ponieważ kąt $\measuredangle OQP$ jest prosty, kąt $\measuredangle RQP = \pi/2 - \alpha$. W tej sytuacji, ponieważ kąt $\measuredangle PRQ$ też jest prosty, kąt $\measuredangle RPQ = \alpha$.

II.

Z rysunku widzimy, że (napis “BP” oznacza “długość odcinka BP” itd)

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BP}{OP} \tag{11}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OB}{OP} \tag{12}$$

$$\sin\alpha = \frac{AQ}{OQ} = \frac{RQ}{PQ} \tag{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OQ} = \frac{PR}{PQ} \tag{14}$$

$$\sin\beta = \frac{PQ}{OP} \tag{15}$$

$$\cos\beta = \frac{OQ}{OP} \tag{16}$$

III. Sinus

$$BP = PR + RB = PR + AQ \tag{17}$$

Rozpatrujemy trójkąt $\triangle OAQ$.

$$PR = PQ \cos\alpha \tag{18a}$$
$$AQ = OQ \sin\alpha \tag{18b}$$

Teraz rozpatrujemy $\triangle OQP$.

$$PQ = OP \sin\beta \tag{19a}$$
$$OQ = OP \cos\beta \tag{19b}$$

$$BP = PQ\cos\alpha + OQ\sin\alpha = OP\sin\beta\cos\alpha + OP\cos\beta\sin\alpha \tag{20}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BP}{OP} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,. \tag{21}$$

IV. Kosinus

$$OB = OA - BA = OA - RQ \tag{22}$$

$\triangle OAQ$:

$$OA = OQ \cos\alpha \tag{23}$$

$\triangle PQR$:

$$RQ = PQ \sin\alpha \tag{24}$$

$\triangle OQP$:

$$PQ = OP \sin\beta \tag{25a}$$
$$OQ = OP \cos\beta \tag{25b}$$

$$OB = OQ \cos\alpha - PQ \sin\alpha = OP \cos\beta \cos\alpha - OP \sin\beta \sin\alpha \tag{26}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \tag{27}$$

Funkcje cyklometryczne: funkcje odwrotne do trygonometrycznych

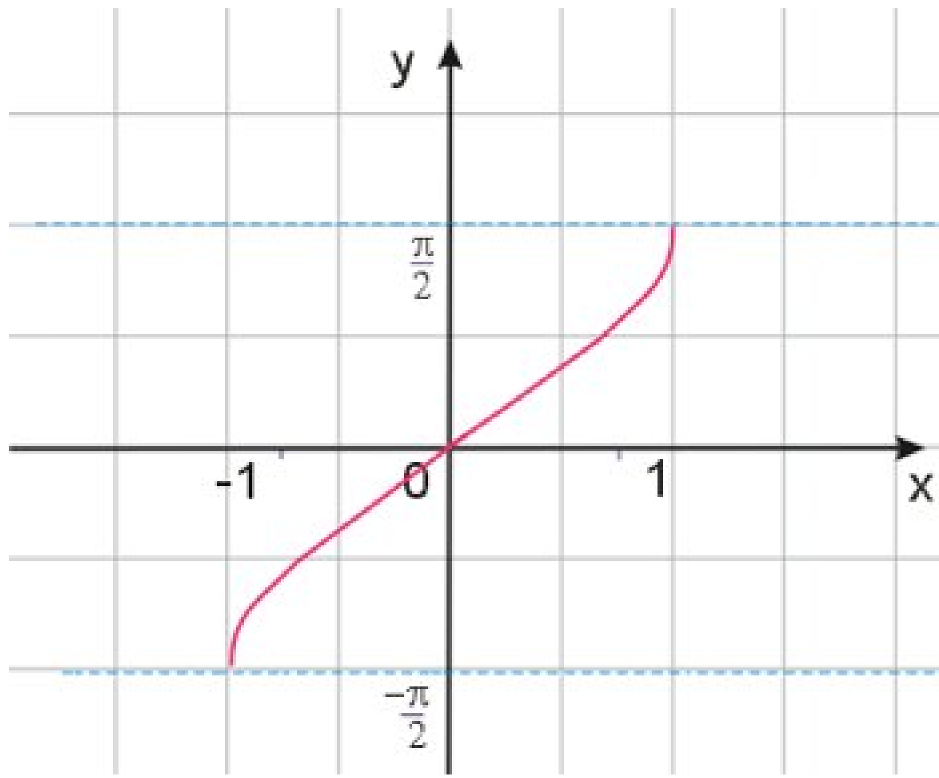
Funkcje trygonometryczne można odwracać tylko w przedziałach, w których funkcje te są monotoniczne (jeżeli funkcja nie jest monotoniczna, nie jest *wzajemnie* jednoznaczna).

Funkcja sinus jest odwracalna w przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$:

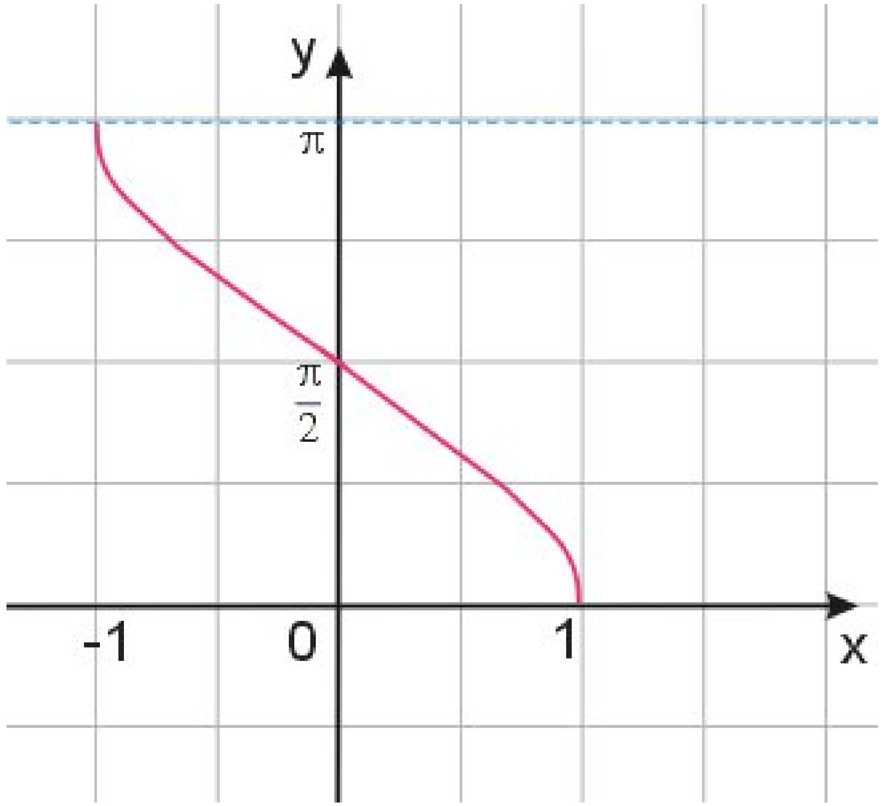
$$y = \text{arc sin}\, x\,, \; y \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \exists x \in [-1, 1] : x = \sin y \tag{28}$$

Funkcja kosinus jest odwracalna w przedziale $[0, \pi]$:

$$y = \text{arc cos}\, x\,, \; y \in [0, \pi] \Leftrightarrow \exists x \in [-1, 1] : x = \cos y \tag{29}$$



arcus sinus



arcus kosinus

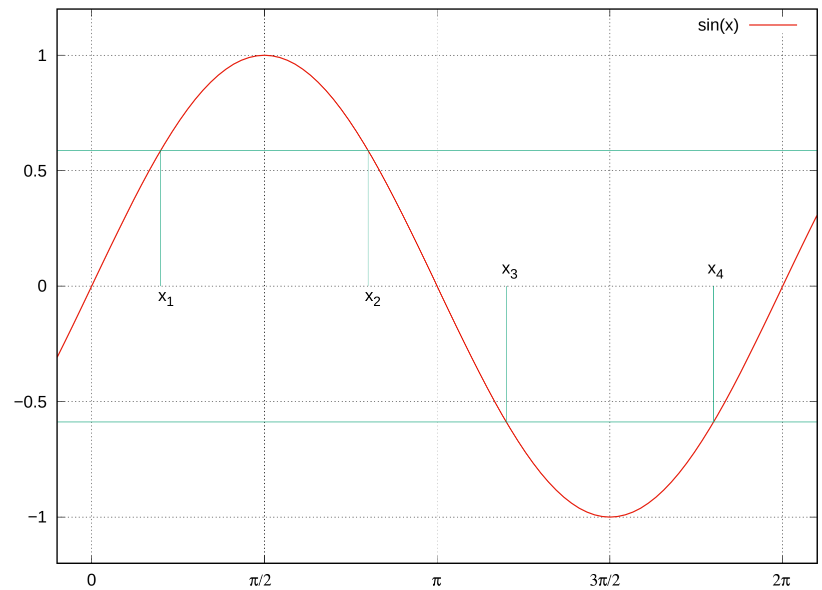
Równania trygonometryczne: sinus

Rozpatrzmy równanie

$$\sin x = z\,. \tag{30}$$

Jeżeli $|z| > 1$, równanie to nie ma rozwiązania. Jeżeli $z = -1, 0, 1$, rozwiązania są trywialne. Pozostaje rozpatrzyć dwa przypadki.

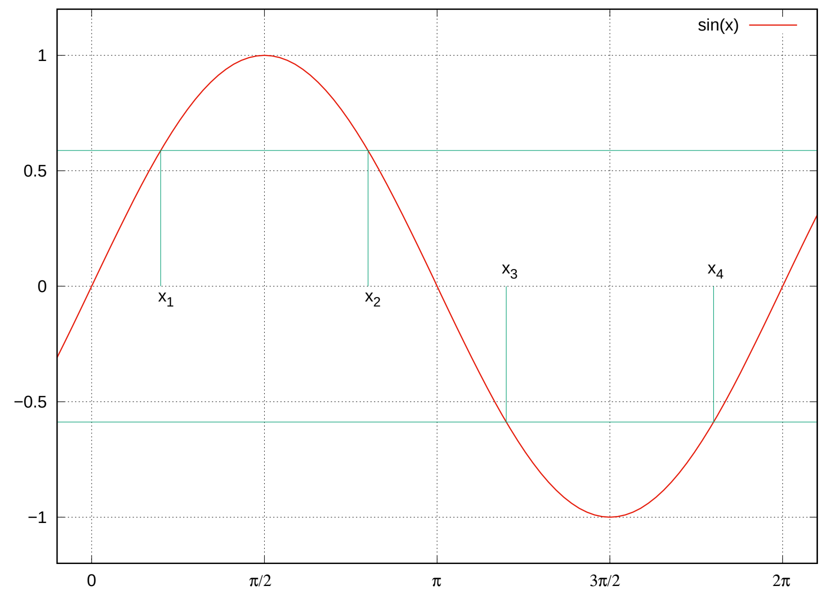
a) $0 < z < 1$.



Z symetrii widzimy, że $\pi - x_2 = x_1$, a zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \text{arc sin}\, z + 2n\pi \vee x = \pi - \text{arc sin}\, z + 2n\pi \,. \tag{31a}$$

b) $-1 < z < 0$.



Z symetrii wykresu $x_3 = \pi + \text{arc sin}\,(|z|)$, a także $x_3 - \pi = 2\pi - x_4$, skąd $x_4 = 3\pi - x_3 = \pi - x_3 = -\text{arc sin}\,(|z|)$; dwie ostatnie równości wynikają z okresowości funkcji sinus. Zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = -\text{arc sin}\,(|z|) + 2n\pi \vee x = \pi + \text{arc sin}\,(|z|) + 2n\pi \tag{31b}$$

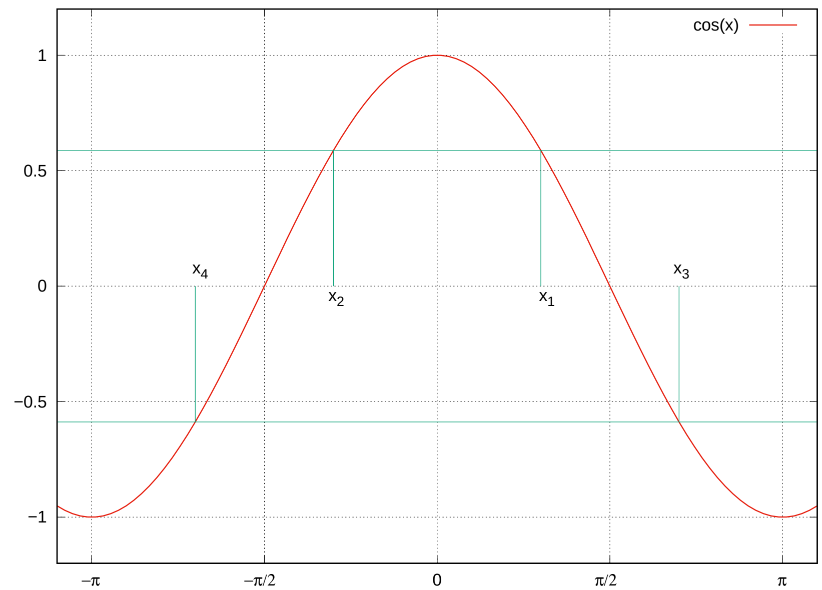
Równania trygonometryczne: kosinus

Rozpatrzmy równanie

$$\cos x = z\,. \tag{32}$$

Jeżeli $|z| > 1$, równanie to nie ma rozwiązania. Jeżeli $z = -1, 0, 1$, rozwiązania są trywialne. Tak jak poprzednio, pozostaje rozpatrzyć dwa przypadki.

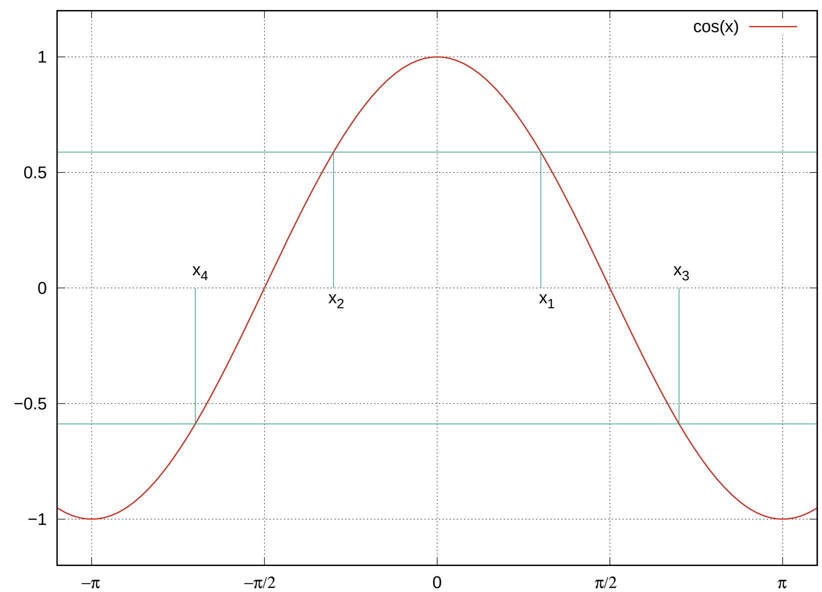
a) $0 < z < 1$.



Mamy $x_1 = \text{arc cos}\, z$, a z parzystości $x_2 = -x_1$. Zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \text{arc cos}\, z + 2n\pi \lor x = -\text{arc cos}\, z + 2n\pi \tag{33a}$$

b) $-1 < z < 0$.



Z symetrii wykresu $pi/2 - x_1 = x_3 - \pi/2 \;\Rightarrow\; x_3 = \pi - x_1$, natomiast z parzystości $x_4 = -x_3$. Ostatecznie ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \pi - \text{arc cos}\,(|z|) + 2n\pi \vee x = -\pi + \text{arc cos}\,(|z|) + 2n\pi\,. \quad \text{(33b)}$$

Przykład

Rozwiąż równanie:

$$\cos 2x = -\frac{1}{3} \tag{34a}$$

Oznaczmy $2x = u$. Mamy zatem

$$\cos u = -\frac{1}{3} \tag{34b}$$

Zgodnie ze wzorami (33b)

$$u = \pi - \text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \vee u = -\pi + \text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \tag{34c}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} \mp \text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right) + n\pi \tag{34d}$$

Przykład

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{5} \tag{35a}$$

Skorzystamy ze wzorów na sinus sumy i różnicy kątów:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} &= -\cos\frac{\pi}{5}\\
2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} &= -\cos\frac{\pi}{5}\\
2\sin\frac{x}{2} &= -1\\
\sin\frac{x}{2} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Po skorzystaniu ze wzorów (31b)

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \tag{35b}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee \frac{7\pi}{3} + 4k\pi \tag{35c}$$