Fizyka dla firm — Matematyka

6. Wielomiany

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

20 października 2022

Wielomianem stopnia n nazywam funkcję $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, \tag{1}$$

gdzie współczynniki wielomianu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$.

Z uwagi na to, że wielomiany o współczynnikach rzeczywistych mogą mieć zespolone pierwiastki, często przyjmuje się, że argument wielomianu może być zepolony, a nawet że współczynniki mogą być zespolone. Powyższą definicję wypada wobec tego uogólnić: Wielomianem stopnia n nazywam funkcję $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \,, \tag{2}$$

gdzie współczynniki wielomianu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ oraz $a_n \neq 0$.

Równania wielomianowe a równość wielomianów

Mówimy, że dwa wielomiany są równe, jeżeli

- ich stopnie są równe,
- wszystkie współczynniki przy odpowiednich potęgach są równe.

W tej sytuacji wartości obu wielomianów obliczane dla każdego argumentu są sobie równe.

Należy to odrónić od równania wielomianowego, gdzie pytamy, jakie zmienne spełniają to równanie.

Przykład

Wyrażenie

$$x^4 - x + 1 = 2x^4 + 3x^2 - 2 \tag{3}$$

jest “równaniem na x”, spełnianym przez cztery liczby: $x_1 = -1$, $x_2 \simeq 0.78324$, $x_3 \simeq 0.1084 - 1.9541\,i$, $x_4 \simeq 0.1084 + 1.9541\,i$. Wielomiany stojące po lewej i prawej stronie równania (3) **nie** są równe.

Działania na wielomianach

- Dodawanie: suma (i różnica) dwu wielomianów jest wielomianem. Współczynniki sumy wielomianów, stojące przy odpowiednich potęgach, są sumami współczynników składników. Stopień wyniku jest niewiększy od wyższego ze stopni składników.
- Istnieje element neutralny względem dodawania — jest to wielomian stały, tożsamościowo równy 0.
- Dodawanie wielomianów jest przemienne i odwracalne; dla każdego wielomianu istnieje wielomian przeciwny;
- Mnożenie: iloczyn dwu wielomianów jest wielomianem. Stopień wyniku jest równy sumie stopni czynników.
- Istnieje element neutralny względem mnożenia — jest to wielomian stały, tożsamościowo równy 1.

- Mnożenie wielomianów jest przemienne i rozdzielne względem dodawania wielomianów.
- Wynik dzielenia wielomianu przez inny wielomian na ogół **nie** jest wielomianem.
- Mnożenie wielomianów **nie** jest odwracalne: Jeżeli $P_n(x)$ jest wielomianem, obiekt $W(x)$ o tej własności, że $P_n(x) \cdot W(x) = 1$ **nie** jest wielomianem.

Dzielenie wielomianów jest na ogół “dzieleniem z resztą”: Jeżeli $P_n(x), Q_m(x)$ są wielomianami, $n \geqslant m$, piszemy

$$P_n(x) : Q_m(x) = W(x) \text{ r. } R \iff P_n(x) = W(x) \cdot Q_m(x) + R \quad (4)$$

gdzie równość po prawej stronie zachodzi w sensie równości wielomianów. $W(x)$ jest wielomianem, R jest liczbą lub wielomianem o stopniu *niższym*, niż stopień $Q_m(x)$.

Dzielenie wielomianu przez dwumian

Szczególne znaczenie ma przypadek, gdy wieloman dzielimy przez dwumian $x - c$, gdzie c jest jakąś znaną liczbą. Mając wielomian $A_n(x)$ szukamy wielomianu $B_{n-1}(x)$, który zgodnie z (4) spełnia

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R \tag{5a}$$

co po rozpisaniu oznacza, że

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ = {} & (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + R \end{aligned} \tag{5b}$$

Wykonując mnożenie po prawej stronie (5b) dostajemy

$$
\begin{aligned}
& a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
= \;& b_{n-1} x^n \\
+ \;& (b_{n-2} - c b_{n-1}) x^{n-1} \\
+ \;& (b_{n-3} - c b_{n-2}) x^{n-2} \\
+ \;& \ldots \\
+ \;& (b_0 - c b_1) x \\
+ \;& (-c) b_0 + R
\end{aligned}
\tag{5c}
$$

Porównując potęgi przy kolejnych potęgach x w równości (5c) otrzymujemy

$$
\begin{array}{cccccccl}
b_{n-1} & & & & & & = & a_n \\
-cb_{n-1} & +b_{n-2} & & & & & = & a_{n-1} \\
 & -cb_{n-2} & +b_{n-3} & & & & = & a_{n-2} \\
 & & \cdots & & & & & \vdots \\
 & & & -cb_1 & +b_0 & & = & a_1 \\
 & & & & -cb_0 & +R & = & a_0
\end{array}
\tag{5d}
$$

Z pierwszego z równań (5d) odczytujemy wartość współczynnika b_{n-1}. Podstawiamy do drugiego z równań (5d) i rozwiązujemy je ze względu na b_{n-2}. Rozwiązanie to podstwiamy do trzeciego z równań (5d) — i tak dalej. Na każdym etapie musimy rozwiązać równanie z jedną niewiadomą.

Przykład

Podzielmy wielomian $A_4(x) = x^4 + x - 2$ przez dwumian $x - 1$. Układ równań (5d) przybiera postać

$$
\begin{aligned}
b_3 &= 1 && \text{(6a)}\\
-b_3 + b_2 &= 0 && \text{(6b)}\\
-b_2 + b_1 &= 0 && \text{(6c)}\\
-b_1 + b_0 &= 1 && \text{(6d)}\\
-b_0 + R &= -2 && \text{(6e)}
\end{aligned}
$$

skąd z łatwością znajdujemy $b_3 = 1$, $b_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 2$, $R = 0$. Obserwacja, że $R = 0$ oznacza, że podane wielomiany dzielą się bez reszty; dwumian $x - 1$ jest podzielnikiem wielomianu $x^4 + x - 2$ lub też $x^4 + x - 2 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 2)$ i ta równość zachodzi w sensie równości wielomianów.

Przykład

Podzielmy wielomian $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ przez dwumian $x + 2$. Układ równań (5d) przybiera w tym wypadku postać

$$b_4 = 1 \tag{7a}$$
$$2b_4 + b_3 = -2 \tag{7b}$$
$$2b_3 + b_2 = 3 \tag{7c}$$
$$2b_2 + b_1 = 3 \tag{7d}$$
$$2b_1 + b_0 = -2 \tag{7e}$$
$$2b_0 + R = 1 \tag{7f}$$

skąd obliczamy $b_4 = 1, b_3 = -4, b_2 = 11, b_1 = -19, b_0 = 36, R = -71$. Zatem $(x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 2) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 19x + 36$ r. -71. Dwumian $x + 2$ **nie** jest podzielnikiem podanego wielomianu. W wyniku dzielenia otrzymujemy niezerową resztę.

“Pisemne” dzielenie wielomianów

Wielomiany można dzielić “pisemnie", podobnie jak dzieli się zwykłe liczby. Na każdym etapie dzielimy najwyższą potęgę przez najwyższą potęgę dzielnika, wymnażamy dzielnik przez wynik i odejmujemy, obniżając w ten sposób stopień dzielnej. Najlepiej to przeanalizować na przykładach.

Przykład: $(x^4 + x - 2) : (x - 1)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\multicolumn{1}{r}{x^3} \\ \hline
x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & : & x & - & 1 \\
x^4 & - & x^3 \\ \cline{1-3}
 & & x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2
\end{array}
$$

Następny krok:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
x^3 & + & x^2 \\ \hline
x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & : & x & - & 1 \\
x^4 & - & x^3 \\ \cline{1-3}
 & & x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 \\
 & & x^3 & - & x^2 \\ \cline{3-5}
 & & & & x^2 & + & x & - & 2
\end{array}
$$

Kolejny krok:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x^3 & + & x^2 & + & x & & & & & & & & \\
\hline
x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & : & x & - & 1 \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & & & & \\
 & & x^3 & - & x^2 & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & x^2 & + & x & - & 2 & & & & \\
 & & & & x^2 & - & x & & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2x & - & 2 & & & & \\
\end{array}
$$

I ostatni:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x^3 & + & x^2 & + & x & + & 2 & & & & & & \\
\cline{1-9}
x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & : & x & - & 1 \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & + & 0x^2 & + & x & - & 2 & & & & \\
 & & x^3 & - & x^2 & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & x^2 & + & x & - & 2 & & & & \\
 & & & & x^2 & - & x & & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2x & - & 2 & & & & \\
 & & & & & & 2x & - & 2 & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & = & & = & & & &
\end{array}
$$

Wielomian $x - 1$ dzieli wielomian $x^4 + x - 2$ bez reszty, a wynikiem jest $x^3 + x^2 + x + 2$.

Przykład: $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$

Algorytm “pisemny” może służyć także do dzielenia przez obiekty bardziej skomplikowane, niż dwumiany.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcccccc}
x^2 & + & x & - & 4 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
x^4 & + & 2x^3 & - & 2x^2 & + & x & + & 1 & : & x^2 & + & x & + & 1 \\
x^4 & + & x^3 & + & x^2 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-5}
 & & x^3 & - & 3x^2 & + & x & + & 1 & & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & + & x & & & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & - & 4x^2 & + & 0x & + & 1 & & & & & & \\
 & & & - & 4x^2 & - & 4x & - & 4 & & & & & & \\
\cline{4-9}
 & & & & & & 4x & + & 5 & & & & & &
\end{array}
$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy wielomianową resztę $4x + 5$.

Miejsca zerowe (pierwiastki) wielomianów

Mówimy, że $z_1 \in \mathbb{C}$ jest miejscem zerowym (pierwiastkiem) wielomianu, jeżeli $P_n(z_1) = 0$.

Uwaga: Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych mogą mieć zespolone miejsca zerowe. **Przykład:** Pierwiastkami wielomianu x^2+1 są liczby urojone $\pm i$.

Krotność miejsca zerowego

Mówimy, że miejsce zerowe wielomianu z_1 jest k-krotne, jeżeli

- $P_n(z_1) = 0$,
- pochodne wielomianu aż do rzędu $k-1$ znikają (zerują się) w z_1, $P_n^{(k-1)}(z_1) = 0$,
- pochodna rzędu k **nie** zeruje się w z_1, $P_n^{(k)}(z_1) \neq 0$

Przykład Wielomian $P_2(x) = x^2$ ma dwukrotne miejsce zerowe w $x = 0$, gdyż $P_2(0) = 0$, $P_2'(x) = 2x$, $P_2'(0) = 0$, $P_2''(x) = 2$, $P_2''(0) = 2 \neq 0$.

Przykład Wielomian $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ma trzykrotne miejsce zerowe w $x = 1$, Istotnie, $P_3(1) = 0$, $P_3'(x) = 3x^2 - 6x + 3\Big|_{x=1} = 0$, $P_3''(x) = 6x - 6\Big|_{x=1} = 0$, $P_3'''(x) = 6\Big|_{x=1} = 6 \neq 0$.

Miejsca zerowe wielomianu o współczynnikach **rzeczywistych** są albo rzeczywiste, albo parami sprzężone.

Istotnie, niech $a_0, \ldots, a_n$ są rzeczywiste. Niech z będzie miejscem zerowym odpowiedniego wielomianu:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0\,. \tag{8a}$$

Dokonujemy zespolonego sprzężenia tego równania:

$$\bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = 0\,. \tag{8b}$$

Ponieważ współczynniki wielomianu są rzeczywiste, ich sprzężenia zespolone są im równe

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0\,, \tag{8c}$$

a to oznacza, że $\bar{z}$ także spełnia równanie (8a). Jest to możliwe albo gdy $z = \bar{z}$, czyli $z \in \mathbb{R}$, albo obie liczby zespolone $z, \bar{z}$ są pierwiastkami tego wielomianu.

Przykład

Rozpatrzmy wielomian $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$. Jego pierwiastkami rzeczywistymi są liczby $(-1 - \sqrt{5})/2$, $(-1 + \sqrt{5})/2$. Jego pierwiastkami zespolonymi są liczby sprzężone $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$.

Podstawowe twierdzenie algebry:

Wielomian stopnia n ma na płaszczyźnie zespolonej **dokładnie** n miejsc zerowych, przy czym wielokrotne miejsca zerowe liczą się wraz ze swoimi krotnościami.

Postać iloczynowa wielomianu

Każdy wielomian stopnia n można *jednoznacznie* przedstawić w postaci iloczynowej:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \tag{9}$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są pierwiastkami wielomianu (w ogólności: zespolonymi).

Jeśli znamy postać iloczynową, obliczenie współczynników wielomianu jest bardzo proste. Jeśli wielomian jest zadany poprzez swoje wpółczynniki, znalezienie jego postaci wielomianowej, czyli znalezienie jego wszystkich miejsc zerowych, może być bardzo trudne. W ogólności nie da się tego zrobić w postaci analitycznej.

Wzory na pierwiastniki

Pierwiastnik: wyrażenie algebraiczne, pozwalające wyliczyć miejsce zerowe wielomianu w oparciu o jego współczynniki.

Wielomian pierwszego stopnia: $ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -b/a$.

Wielomian drugiego stopnia: $ax^2 + bx + c = 0$ — doskonale znane wzory “na deltę”.

Istnieją niewygodne w użyciu wzory algebraiczne na pierwiastki **wielomianów trzeciego stopnia** oraz **bardzo** niewygodne w użyciu wzory algebraiczne na pierwiastki **wielomianów czwartego stopnia**.

W ogólności nie istnieją wzory algebraiczne na pierwiastki **wielomianów stopnia piątego** i wyższych.

Twierdzenie: Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite, to jego pierwiastki całkowite, jeśli istnieją, są podzielnikami wyrazu wolnego.

Twierdzenie: Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite, to jego pierwiastki wymierne, jeśli istnieją, mają postać p/q, gdzie p jest podzielnikiem wyrazu wolnego, q podzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze.

Powyższe twierdzenie można uogólnić na przypadek wielomianów o współczynnikach wymiernych: Jeśli pomnożymy wielomian przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników współczynników wielomianu, uzyskamy wielomian o współczynnikach całkowitych i **takich samych**, jak wielomian wyjściowy, miejscach zerowych.

Przykład

Dany jest wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$. Podzielnikami wyrazu wolnego -2 są liczby $1, -1, 2, -2$, zatem tylko wśród tych liczb można szukać pierwiastków całkowitych tego wielomianu. Sprawdzamy $W(1) = 1 - 2 + 1 - 1 - 2 = -3 \neq 0$. $W(-1) = -1 - 2 + 1 + 1 - 2 = -3 \neq 0$, $W(2) = 32 - 2 \cdot 16 + 4 - 2 - 2 = 0$, $W(-2) = -32 - 2 \cdot 16 + 2 + 2 - 2 = -62 \neq 0$. Wobec tego jedynym całkowitym mierwiastkiem tego wielomianu jest $x = 2$. Za pomocą poznanego już algorytmu dzielenia wielomianów wielomian ten można przedstawić w postaci $W(x) = (x - 2)(x^4 + x + 1)$.

Przykład

Dany jest wielomian $P(x) = x^3 + x^2 + x + 4$. Podzielnikami wyrazu wolnego 4 są liczby $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Sprawdzamy $P(1) = 7$, $P(-1) = 3$, $P(2) = 18$, $P(-2) = 2$, $P(4) = 88$, $P(-4) = -48$. Wnioskujemy stąd, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

Przykład

Dany jest wielomian $Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$. Pierwiastków wymiernych tego wielomianu można szukać wśród liczb $1, -1, 1/3, -1/3$. Sprawdzamy $Q(1) = 4$, $Q(-1) = 8$, $Q(1/3) = 0$, $Q(-1/3) = 28/9$. Zatem jedynym wymiernym pierwiastkiem tego wielomianu jest $x = 1/3$.

Graniczne zachowania wielomianów

Rozpatrujemy wielomiany o współczynnikach **rzeczywistych**. Przy określeniu, jak taki wielomian zachowuje się, gdy argument dąży do $\pm\infty$, wystarczy przeanalizować zachowanie wyrazu wiodącego, czyli wyrazu z najwyższą potęgą zmiennej. Najwyższa potęga określa stopień wielomian.

- Jeżeli wielomian jest stopnia parzystego oraz
  - współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, wielomian dąży do $+\infty$ w $+\infty$ i w $-\infty$;
  - współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, wielomian dąży do $-\infty$ w $+\infty$ i w $-\infty$.
- Jeżeli wielomian jest stopnia nieparzystego oraz
  - współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, wielomian dąży do $+\infty$ w $+\infty$ i do $-\infty$ w $-\infty$;

– współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, wielomian dąży do $-\infty$ w $+\infty$ i do $+\infty$ w $-\infty$.

Wynika stąd, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych musi mieć przynajmniej jedno rzeczywiste miejsce zerowe. Nieco bardziej precyzyjnie: suma krotności rzeczywistych miejsc zerowych wielomianu stopnia nieparzystego i o rzeczywistych współczynnikach musi być nieparzysta.