

# Fizyka dla firm — Matematyka

## 5. Liczby zespolone

P. F. Góra

[https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel\\_gora](https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora)

17 października 2022

## Liczby zespolone

Definicja:  $\mathbb{C}$  — zbiór par liczb rzeczywistych

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad (1)$$

w którym określono następujące działania:

**dodawanie**

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{df}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2)$$

**mnożenie**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{df}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (3)$$

Elementy zbioru  $\mathbb{C}$  z tak określonymi działaniami nazywamy *liczbami zespolonymi*.

## Liczby rzeczywiste

Zauważmy, że liczby zespolone postaci  $(x, 0)$  dodają się i mnożą tak, jak liczby rzeczywiste:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad (4a)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1x_2, 0) \quad (4b)$$

Wobec tego liczby **zespolone** postaci  $(x, 0)$  będziemy utożsamiać z liczbami **rzeczywistymi**  $x$ .  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## Liczby urojone

Obliczmy teraz  $(0, 1)^2$ .

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) \quad (5)$$

Liczbę zespoloną  $(-1, 0)$  utożsamiliśmy z liczbą rzeczywistą  $-1$ . Oznaczmy

$$(0, 1) = i \quad (6)$$

Mamy zatem

$$i^2 = -1 \quad (7)$$

Liczby **zespolone** postaci  $(0, x)$  nazywamy **liczbami urojonymi**. Kwadraty liczb urojonych są **ujemnymi** liczbami rzeczywistymi.

## Tradycyjna reprezentacja liczb zespolonych

Liczbę zespoloną  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  najczęściej przedstawia się w postaci

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (8)$$

Jeśli  $z = x + iy$ ,  $x = \operatorname{Re} z$  nazywa się *częścią rzeczywistą*, natomiast  $y = \operatorname{Im} z$  nazywa się *częścią urojoną* liczby zespolonej  $z$ .  $z = (\operatorname{Re} z) + i(\operatorname{Im} z)$ .

Takie przedstawienie jest zgodne z podaną definicją mnożenia: Niech  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Wówczas

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \quad (9)$$

## Liczby zespolone tworzą ciało

1. Dodawanie jest łączne:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

2. Istnieje element neutralny dodawania:

$$\forall z \in \mathbb{C}: z + 0 = 0 + z = z, \text{ gdzie } 0 \equiv (0, 0) \in \mathbb{C}.$$

3. Istnieje element odwrotny względem dodawania:

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C}: z + (-z) = -z + z = 0.$$

4. Mnożenie jest łączne:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3.$$

5. Istnieje element neutralny mnożenia:

$$\forall z \in \mathbb{C}: z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \text{ gdzie } 1 \equiv (1, 0) \in \mathbb{C}.$$

6. Istnieje element odwrotny względem mnożenia:

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \exists z^{-1} \in \mathbb{C}: z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1.$$

7. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Ponadto

8. Dodawanie jest przemienne:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

9. Mnożenie jest przemienne:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Mówimy, że liczby zespolone wraz z określonymi na nich działaniami tworzą *ciało przemienne*.

Uwaga!

W ciele liczb zespolonych *nie jest określona* naturalna relacja porządkująca.

Jeśli  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , napisy  $z_1 < z_2$ ,  $z_1 > z_2$  w ogólności *nie mają sensu!*

## Równość liczb zespolonych

Równość liczb zespolonych oznacza *jednoczesną* równość ich części urojonych i rzeczywistych.

Przykład 1  $x + iy = 2 + 3i \Leftrightarrow x = 2, y = 3.$

Przykład 2 Znaleźć liczby rzeczywiste  $a, b$ , takie, że  $a(2 + 3i) + b(4 - 5i) = 6 - 2i$ . Porządkując wyrazy po lewej stronie znajdujemy  $2a + 4b + i(3a - 5b) = 6 - 2i$ , a zatem otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2a + 4b = 6 \\ 3a - 5b = -2 \end{cases}$$

(Rozwiązaniem jest  $a = 1, b = 1.$ )



## Przykłady

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1} &= \frac{i+1}{(i-1)(i+1)} + \frac{i-1}{(i+1)(i-1)} = \frac{i+1+i-1}{i^2-i+i-1} \\ &= \frac{2i}{-2} = -i \end{aligned} \quad (11)$$

## Moduł i sprzężenie zespolone

Niech  $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ .

**Modułem** liczby  $z$  nazywam liczbę **rzeczywistą**  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Liczbą sprzężoną** do  $z$  nazywam liczbę **zespoloną**  $\bar{z} = z^* = x - iy$ .

Zauważmy, że  $z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$   
oraz  $|z| = |z^*|$ .

**Przykład**  $z = 3 + 4i$ ,  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ,  
 $z^* = 3 - 4i$ .

## Przykłady

1. Usunąć część urojoną z mianownika i znaleźć moduł liczby  $u = \frac{1}{1+2i}$ . Rozwiązanie:

$$u = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

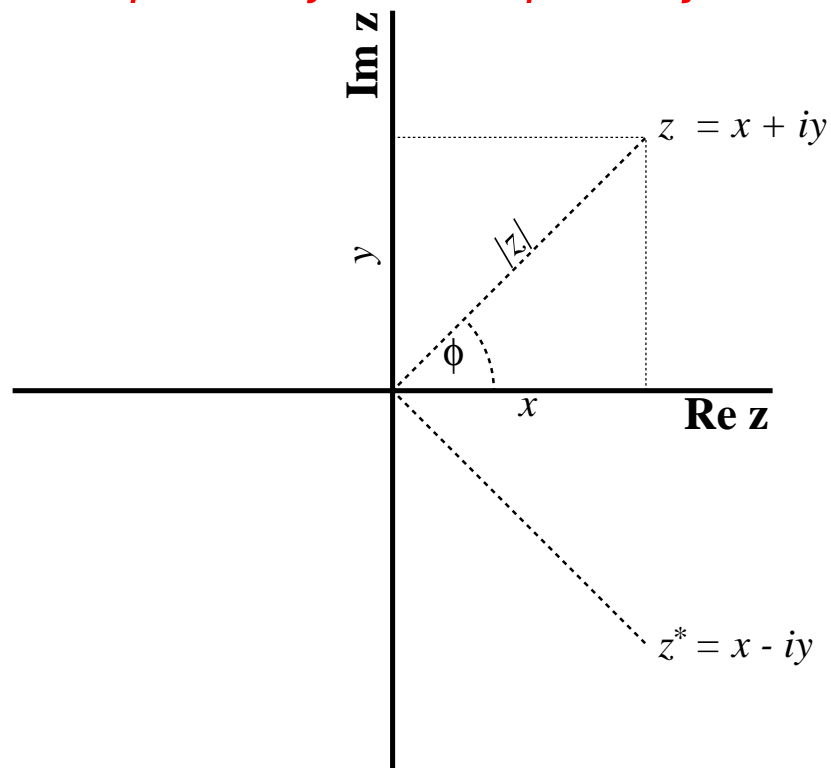
$$|u| = \sqrt{1/25 + 4/25} = \sqrt{5/25} = 1/\sqrt{5}.$$

2. Obliczyć  $v = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$ . Rozwiązanie:

$$v = \left(\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^2 = (-i)^2 = -1.$$

## Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Liczby zespolone — pary liczb rzeczywistych — odpowiadają punktom na *płaszczyźnie zespolonej*.



## Przykłady

Znajdź miejsca geometryczne odpowiadające następującym zbiorom liczb zespolonych:

1.  $|z| = 2$ . (Odpowiedź: Okrąg o promieniu 2 i środku w punkcie  $(0, 0)$ .)
2.  $|z - 2i| < 9/16$ . (Odpowiedź: *Wnętrze* okręgu o promieniu  $9/16$  i środku w punkcie  $(0, 2)$ .)
3.  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ . Rozwiązanie: Oznaczając  $z = x + iy$ , otrzymujemy

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 3$$

Ponieważ  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c \Rightarrow 4ab = (c^2 - a - b)^2$ , mamy

$$4 [(x - 1)^2 + y^2] [(x + 1)^2 + y^2] = (9 - (x - 1)^2 - y^2 - (x + 1)^2 - y^2)^2 .$$

Upraszczając to wyrażenie, otrzymujemy ostatecznie równanie elipsy  $20x^2 + 36y^2 = 45$ .

## Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Niech  $z = x + iy \neq 0$ . Przywołując interpretację geometryczną liczb zespolonych, widzimy, że

$$\frac{x}{|z|} = \cos \phi, \quad \frac{y}{|z|} = \sin \phi. \quad (12)$$

Innymi słowy,

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (13)$$

Liczbę  $\phi$  nazywamy *argumentem* (lub *fazą*) liczby zespolonej i oznaczamy  $\phi = \arg z$ . **Argument nie jest określony jednoznacznie:** z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych, jeśli  $\phi$  jest argumentem jakiejś liczby zespolonej, także wszystkie liczby postaci  $\phi + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , są jej argumentami. Argument liczby zespolonej należący do przedziału  $[0, 2\pi)$  nazywamy *argumentem głównym* i oznaczamy  $\text{Arg } z$ .

## Wzór de Moivre'a

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \quad (14)$$

$$z = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi), \quad \phi \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Uzasadnienie: Dla liczby zespolonej  $z$ , funkcję wykładniczą definiujemy poprzez rozwinięcie Taylora:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (16a)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\phi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\phi^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos \phi + i \sin \phi. \end{aligned} \quad (16b)$$

## Przykłady

1.  $\arg 1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2.  $\arg(-5) = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$

3.  $\text{Arg}(-5) = \pi.$

4.  $\arg(1 + i) = \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

5.  $\text{Arg}(-7i) = 3\pi/2.$

6. Dla  $\psi \in \mathbb{R}, |e^{i\psi}| = |\cos \psi + i \sin \psi| = \sqrt{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = 1.$

7. Dla  $m \in \mathbb{Z}, z \neq 0$  dostajemy

$$z^m = (|z|e^{i\phi})^m = |z|^m e^{im\phi} = |z|^m (\cos m\phi + i \sin m\phi).$$



## Przykład

Obliczyć  $w = \left( \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \right)^7$ .

Rozwiązanie:

$$w = (p/q)^7 = p^7/q^7$$

$$p = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{1/2}e^{i\pi/4}$$

$$p^7 = 2^{7/2}e^{i7\pi/4} = 2^{7/2}e^{-i\pi/4} = 2^{7/2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2^3(1 - i)$$

$$q = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \quad \left( \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$q^7 = 2^7 e^{i7\pi/3} = 2^7 e^{i\pi/3} = 2^7 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^6(1 + i\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2^3(1-i)}{2^6(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{2^3} \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{8} \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1}{8} \frac{1-i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{1+3} \\ &= \frac{1}{32} [1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})]. \end{aligned}$$

## Pierwiastkowanie liczb zespolonych

*Całkowite* potęgi liczb zespolonych oblicza się “tak samo”, jak całkowite potęgi liczb rzeczywistych. Jeśli wykładnik nie jest całkowity, obliczenia przebiegają inaczej. W tym miejscu rozważmy potęgi o wykładnikach rzeczywistych, wymiernych.

Niech  $z = |z|e^{i\phi} \equiv |z|e^{i\phi+2in\pi} \in \mathbb{C}$ . Niech  $r, s \in \mathbb{Z}$ .

$$z^{r/s} \stackrel{\text{df}}{=} |z|^{r/s} e^{ir\phi/s+2inr\pi/s}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

*Wzór (17) określa całą rodzinę liczb, nie pojedynczą liczbę!* Dla  $r, s, n \in \mathbb{Z}$ , wyrażenie  $e^{2inr\pi/s}$  jest okresowe, a więc wzór (17) określa skończony zbiór liczb.

## Przykłady

$1 = e^{2in\pi}$ .  $1^{1/k}$  określa  $k$ -ty pierwiastek z jednościami. Dostajemy

$$1^{1/k} = e^{2il\pi/k} \text{ dla } l = 0, 1, \dots, k-1.$$

Przykład: Jako czwarte pierwiastki z jednościami otrzymujemy  $e^0 = 1$ ,  $e^{2i\pi/4} = i$ ,  $e^{4i\pi/4} = -1$ ,  $e^{6i\pi/4} = -i$ .

Przykład: Ile niezależnych liczb dostaniemy obliczając  $z^{2/3}$ ?

$z^{2/3} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4in\pi/3}$ . Zatem

$$n = 0: |z|^{2/3} e^{2i\phi/3}.$$

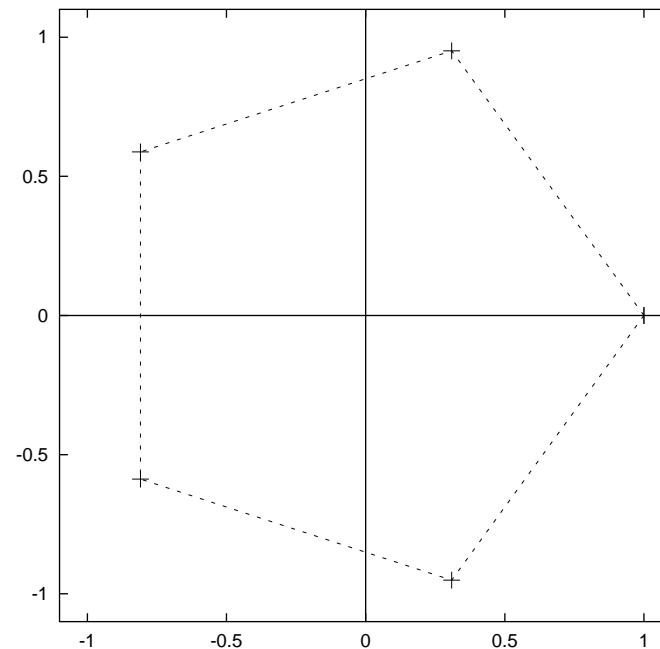
$$n = 1: |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4i\pi/3}.$$

$$n = 2: |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{8i\pi/3}.$$

$$n = 3: |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{12i\pi/3} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4i\pi} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3}.$$

Otrzymujemy zatem trzy **niezależne** pierwiastki (dla  $n = 0, 1, 2$ ).

## Przykład — piąte pierwiastki z jednośc



W ogólności pierwiastki rzędu  $k$  z jednośc leżą w wierzchołkach  $k$ -kąta foremnego.

## Potęgi o wykładnikach niewymiernych

Potęgi o zespolonych podstawach i wykładnikach rzeczywistych, niewymiernych, definiujemy analogicznie do potęg o wykładnikach wymiernych. Jeżeli  $z = |z|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{I}\mathbb{Q}$ , to

$$z^\alpha \stackrel{\text{df}}{=} |z|^\alpha e^{i\alpha\phi + 2in\alpha\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

W odróżnieniu od wyrażenia (17), wyrażenie (18) definiuje rodzinę *nieskończenie wielu* liczb zespolonych. Dzieje się tak dlatego, że dla niewymiernego  $\alpha$ ,  $e^{2in\alpha\pi}$  nie jest okresowe przy zmianie  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Logarytm zespolony

Dodawanie, mnożenie i potęgowanie (z dowolnymi wykładnikami rzeczywistymi) liczb zespolonych było zdefiniowane tak, aby operacje te dla liczb rzeczywistych zachowywały się w znany sposób. Nie inaczej jest z logarytmowaniem:

$$p = \ln q \Leftrightarrow q = e^p \quad (19)$$

a zatem ( $z \neq 0$ )

$$z = |z|e^{i\phi} = e^{\ln |z| + i\phi + 2in\pi} \Leftrightarrow \log z = \ln |z| + i\phi + 2in\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

Logarytm zespolony jest zatem określony jako rodzina *nieskończenie wielu* liczb. Jeśli przyjmiemy  $n = 0$  oraz jeśli  $\phi \in [0, 2\pi)$ , dostaniemy tak zwaną gałąź główną logarytmu,  $\text{Log } z = \ln |z| + i\phi$ , ale jest to wybór arbitralny — równie dobrze moglibyśmy wziąć jakiegokolwiek inne  $n$  całkowite.

Przykłady:  $\text{Log } i = i\pi/2$ ,  $\text{Log}(-1) = i\pi$ ,  
 $\log(1 + i) = \ln 2 + i\pi/4 + 2in\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Potęgi o wykładnikach zespolonych

Dla liczb rzeczywistych zachodzi ( $x > 0$ )

$$x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}$$

Wobec tego definiujemy ( $z \neq 0$ )

$$z^w = e^{w \log z} \tag{21}$$

Poza przypadkiem, gdy  $w$  jest liczbą rzeczywistą, całkowitą, powyżej zdefiniowana operacja jest niejednoznaczna — określa wiele (niekiedy nieskończenie wiele) liczb zespolonych.

## Przykład

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\pi/2 + 2in\pi)} = e^{-\pi/2} e^{-2n\pi}$$

Operacja  $i^i$  określa rodzinę liczb *rzeczywistych*. Jeśli ograniczymy się do gałęzi głównej logarytmu, dostaniemy  $i^i = e^{-\pi/2} \simeq 0.207880$ .



## Inny przykład

Obliczmy  $\sin i$ . W tym celu zauważmy, że

$$1/e = e^{-1} = e^{i \cdot i} = \cos i + i \sin i \quad (22a)$$

$$e = e^1 = e^{-i \cdot i} = \cos i - i \sin i \quad (22b)$$

Odejmując te równania stronami otrzymujemy  $e^{-1} - e = 2i \sin i$ , a stąd

$$\sin i = \frac{e - e^{-1}}{2} i = i \sinh 1. \quad (23)$$

Zauważmy, że  $|\sin i| \simeq 1.175201 > 1$  😊

(Natomiast  $\cos i = (e + e^{-1})/2 = \cosh 1 \simeq 1.543081 > 1$  jest liczbą rzeczywistą.)