Fizyka dla firm — Matematyka

4. Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

13 października 2022

Potęgi o wykładniku naturalnym

Zapis a^n, gdzie $a > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, interpretujemy jako skrócony zapis mnożenia:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ razy}} \,. \tag{1}$$

Liczbę a nazwyamy *podstawą* potęgi, liczbę n nazywamy *wykładnikiem*. Na przykład $2^2 = 2 \cdot 2$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, $13^4 = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$. Przyjmujemy, że $a^1 \equiv a$.

Potęgi o wykładniku postaci $1/n$

Przyjmujemy, że

$$b = a^{\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n \,, \tag{2}$$

gdzie $a, b > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Potęgi tej postaci nazywa się także *pierwiastkami arytmetycznymi*: $b = \sqrt[n]{a}$. Na przykład $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Potęgi o wykładniku postaci m/n

Przyjmujemy, że

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \,, \tag{3}$$

gdzie $a > 0$, $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. Na przykład $6^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^2 = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$.

Potęgi o wykładniku ujemnym

Przyjmujemy, że

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\,, \tag{4}$$

gdzie $a > 0$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Zasadę tę można uogólnić, przyjmując, że dla $a > 0$ zachodzi $\forall\alpha\colon a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$. Na przykład $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$.

Potęgi zera

Przyjmujemy, że $\forall\alpha > 0\colon 0^\alpha = 0$. Proszę zwrócić uwagę, że zapis 0^0 jest tak zwanym *symbolem nieoznaczonym*, którego wartość nie jest z góry znana.

Potęgi o wykładniku zerowym

Przyjmujemy, że $\forall a > 0\colon a^0 = 1$. Ponownie zwracamy uwagę, że zapis 0^0 jest symbolem nieoznaczonym.

Potęgi o wykładniku rzeczywistym

Powyższe zasady pozwalają prawidłowo zinterpretować dowolną potęgę o wykładniku wymiernym, $a^{\frac{p}{q}}$, gdzie $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Mając zdefiniowane potęgi o wykładnikach wymiernych, możemy zdefiniować potęgi o dowolnych wykładnikach rzeczywistych. Mianowicie, niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem *wymiernym*, takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \alpha$. Wówczas

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{w_n}\,, \tag{5}$$

gdzie $a > 0$.

Potęgowanie liczb ujemnych

Podkreślamy, że potęgować można tylko i wyłącznie liczby nieujemne. **Jedyny wyjątek** czynimy dla potęg o wykładnikach całkowitych, gdzie można zastosować zasady (1) i (4). Na przykład $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$.

W ogólności potęgowanie liczb ujemnych prowadzi do niejednoznaczności, które można prawidłowo zinterpretować dopiero w ramach teorii liczb zespolonych.

Działania na potęgach

Z powyższych definicji wynikają następujące zasady działań na potęgach:
Dla dowolnego $a > 0$ i dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \tag{6a}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta} \tag{6b}$$

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} \tag{6c}$$

Przykład: $\left(5^3\right)^2 = \left(5^3\right)\cdot\left(5^3\right) = (5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5) = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^6 = 5^{2\cdot3} = 15\,625$.

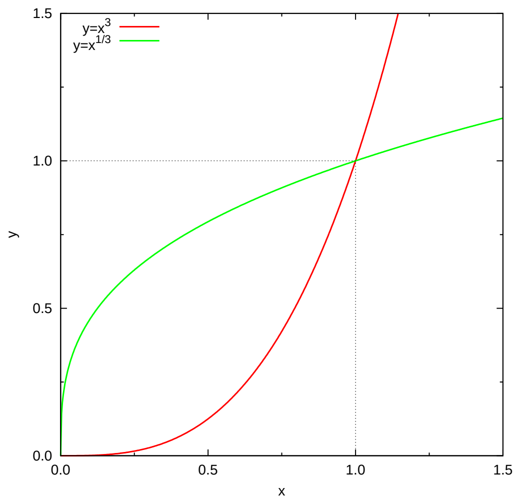
Zasada (6c) wynika z zasady (6a), gdyż ($a > 0$)

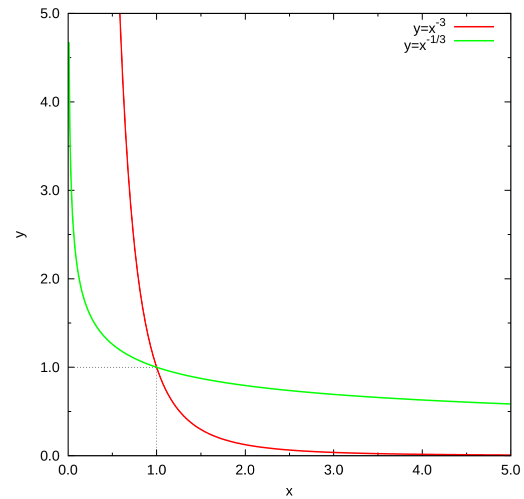
$$1 = a^0 = a^{\alpha-\alpha} = a^\alpha \cdot a^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$$

ale ponieważ jest ona bardzo ważna, zdecydowaliśmy się wypisać ją osobno.

Funkcja potęgowa

Korzystając z powyższych własności, dla $x \in \mathbb{R}^+$ możemy zdefiniować *funkcję potęgową* $x \to x^\alpha$. Dla $\alpha > 0$ funkcja ta jest rosnąca, dla $\alpha < 0$ malejąca, dla $\alpha = 0$ jest to funkcja stała. Wykresy funkcji potęgowej dla przykładowych wartości α przedstawia poniższy rysunek.



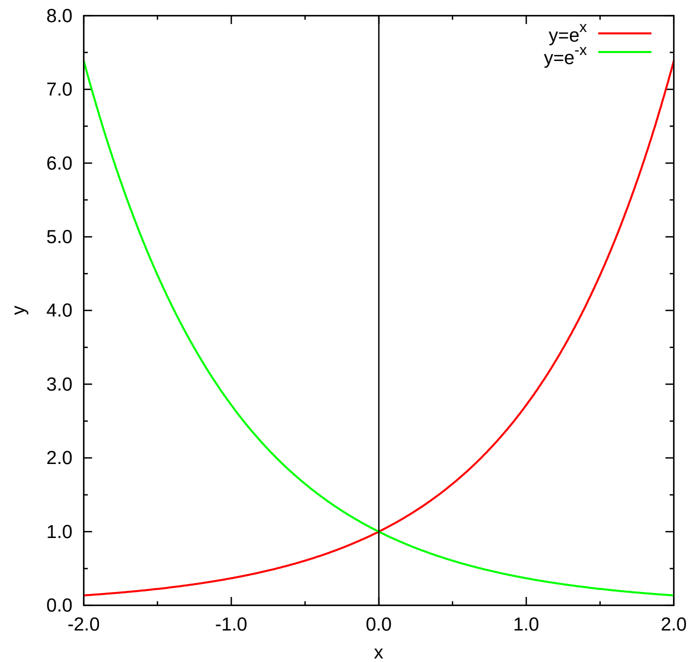


Funkcja wykładnicza

Dla liczb $a > 0$ definiujemy *funkcję wykładniczą* $x \to a^x$. Z własności potęg wynika, że $a^x \cdot a^{-x} = 1$. Dla $a > 1$ funkcja a^x jest ściśle rosnąca, funkcja a^{-x} ściśle malejąca. Szczególne znaczenie ma funkcja wykładnicza e^x, której podstawą jest liczba

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2.718281828459045235360287471352 66\ldots .$$

Funkcję e^x oznacza się także $\exp x$. Poniższy rysunek przedstawia wykresy funcji e^x i e^{-x}.



Logarytmy

Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania. Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, *logarytm o podstawie* a z liczby $x > 0$, oznaczany $\log_a x$, mówi nam do jakiej potęgi należy podnieść podaną podstawę, aby otrzymać liczbę x.

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y\,, \qquad a, x > 0\,. \tag{7}$$

Przykłady: $\log_2 8 = 3$, gdyż $8 = 2^3$. $\log_{10} 10000 = 4$, gdyż $10000 = 10^4$. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, gdyż $\frac{1}{16} = 2^{-4}$. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, gdyż $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. $\log_8 1 = 0$, gdyż $1 = 8^0$.

Logarytm o podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy $\ln x = \log_e x$.

Własności logarytmów

Niech $a, x, y, \dots > 0$. Zachodzą następujące własności:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \,. \tag{8}$$

Aby to uzasadnić, zauważmy, że **z definicji logarytmu** $w = a^{\log_a w}$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a \left(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \right) = \log_a \left(a^{\log_a x + \log_a y} \right) \\ &= \log_a x + \log_a y \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \,. \tag{10}$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \tag{11}$$

Istotnie,

$$\log_a x^y = \log_a \left[\left(a^{\log_a x}\right)^y\right] = \log_a \left[a^{y \log_a x}\right] = y \log_a x\,. \tag{12}$$

$$(\log_x y) \cdot (\log_y z) = \log_x z \tag{13}$$

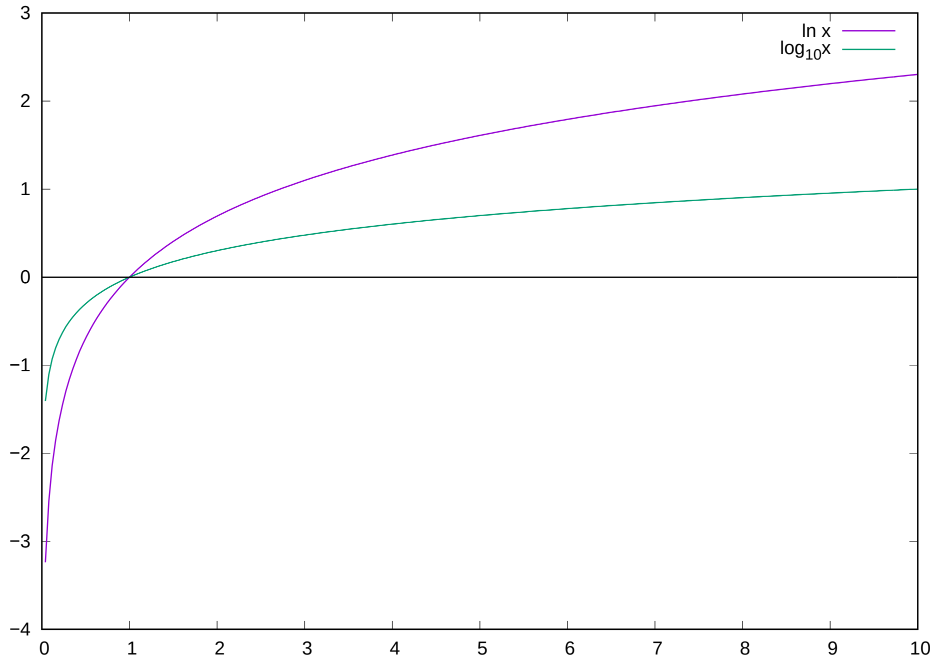
Postępujemy podobnie, jak poprzednio:

$$(\log_x y) \cdot (\log_y z) = (\log_y z) \cdot (\log_x y) = \log_x \left(y^{\log_y z} \right) = \log_x z \tag{14}$$

Ze wzoru (13) wynika następujący *wzór na zamianę podstaw logarytmów*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a, b, x > 0 \,. \tag{15}$$

Funkcja logarytmiczna



$$y = \log_a x$$

Funkcje hiperboliczne

Definiujemy sinus i kosinus hiperboliczny:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \tag{16a}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right). \tag{16b}$$

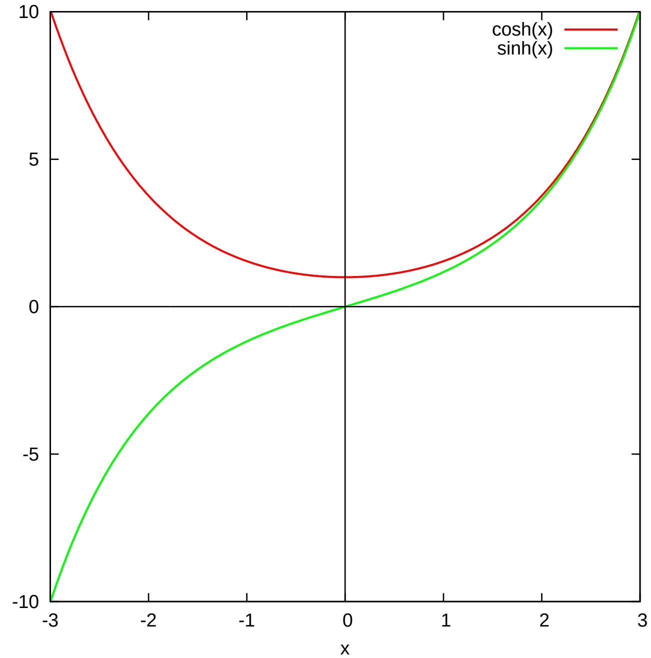
Dlaczego “sinus” i “kosinus”? Ze wzoru de Moivre’a

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{17}$$

i analogicznego wzoru na e^{-ix} można łatwo wyprowadzić

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \tag{18a}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \tag{18b}$$


cosh(x)
sinh(x)
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

Funkcje odwrotne do hiperbolicznych

$$\begin{aligned} \operatorname{ar\,cosh} x &= y \Leftrightarrow \cosh y = x\,, && (19a)\\ \operatorname{ar\,sinh} x &= y \Leftrightarrow \sinh y = x\,. && (19b) \end{aligned}$$

Funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych *można* wyrazić za pomocą skończonej kombinacji funkcji elementarnych.

$$\begin{aligned} \operatorname{ar\,cosh} x &= y && (20a)\\ x &= \cosh y && (20b)\\ x &= \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) && (20c)\\ 2x &= e^y + e^{-y} && (20d)\\ e^y - 2x + e^{-y} &= 0 \;\big|\; \cdot e^y && (20e)\\ e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0 && (20f) \end{aligned}$$

Jest to równanie kwadratowe w zmiennej e^y. Jego rozwiązaniem jest

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \tag{20g}$$

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{20h}$$

$$\operatorname{ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{20i}$$

Rozwiązanie $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ daje drugą gałąź funkcji $\operatorname{ar}\cosh x$, zaznaczoną na poniższym rysunku linią przerywaną. Zauważmy, że

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = x - \sqrt{x^2 - 1}\,, \tag{21}$$

a wobec tego $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Postępując analogicznie, stwierdzamy, że

$$\operatorname{ar\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \tag{22}$$

Funkcja ta ma tylko jedną gałąź.