Fizyka dla firm — Matematyka

3. Liczby

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

13 października 2022

Liczby naturalne

Liczby naturalne: $0, 1, 2, 3, \ldots$. (To, czy zero jest naturalne, jest kwestią umowy.) Zbiór liczb naturalnych oznaczam przez $\mathbb{N}$.

Zbiór liczb naturalnych zdefiniowany jest przez odpowiednie aksjomaty (aksjomaty Peano (właściwie: Peana)), których nie będziemy tu omawiać ☺

Liczby całkowite

Liczby naturalne i liczby przeciwne do nich: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Widać, że zbiór liczb całkowitych można ustawić w ciąg, czyli *ponumerować* za pomocą liczb naturalnych. Jest to bijekcja. Widzimy więc, że zbiór liczb całkowitych jest **równoliczny** ze zbiorem liczb naturalnych. Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywam **zbiorami przeliczalnymi**, a ich moc oznacza się symbolem $\aleph_0$. Zbiór liczb całkowitych oznaczam symbolem $\mathbb{Z}$.

Liczby wymierne

Rozpatruję ułamki, czyli wyrażenia postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Jeżeli m, n mają wspólny czynnik, to znaczy $\exists k, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$: $m = k \cdot p \ \wedge \ n = k \cdot q$, mówimy, że ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ są sobie równe:

$$\frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

Jeżeli takie k nie istnieje, o ułamku mówimy, że jest nieskracalny, a jego licznik i mianownik są względnie pierwsze. Zbiór wszystkich możliwych ułamków nazywam zbiorm liczb wymiernych i oznaczamy $\mathbb{Q}$. Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny

Aby to udowodnić, zacznijmy od dowodu, że zbiór dodatnich liczb wymiernych jest przeliczalny. W tym celu ustawmy wszystkie dotatnie ułamki w tablicę postaci

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
\tag{2}
$$

Na kolejnych przekątnych (nachylonych w prawo) leżą ułamki o stałej sumie licznika i mianownika, każda taka przekątna składa się ze skończenie wiele takich ułamków. Każdy ułamek leży na jakiejś przekątnej. Dlatego układając kolejno ułamki najpierw z pierwszej przekątnej, potem z drugiej, potem z trzeciej i tak dalej, ustawimy liczby wymierne dodatnie w ciąg (z powtórzeniami):

$$\mathbb{Q}^{+} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \tag{3}$$

Teraz, jak w wypadku liczb całkowitych, wstawiamy liczby ujemne za ich dodatnimi odpowiednikami.

Liczby rzeczywiste

Nie wszystkie liczby są wymierne! Przykład: rozpatrzmy $\sqrt{2}$, czyli nieujemną liczbę o tej własności, że $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Dowód nie wprost: Przyjmijmy, że $\exists m, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Mamy

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{4a}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \tag{4b}$$

$$2n^2 = m^2 \tag{4c}$$

Liczba m^2 jest parzysta, a zatem także liczba m jest parzysta: $\exists k \in \mathbb{N} : m = 2k$. Mamy więc

$$2n^2 = (2k)^2 \tag{4d}$$

$$2n^2 = 4k^2 \tag{4e}$$

$$n^2 = 2k^2 \tag{4f}$$

Widzimy, że także liczba n^2 jest parzysta, a więc liczba n jest parzysta, $\exists l \in \mathbb{N} : n = 2l$. Ostatecznie $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}, k, l \in \mathbb{N}$, co jest *sprzeczne* z założeniem, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny.

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy liczbami niewymiernymi. Liczby niewymierne mają nieskończone, nieokresowe rozwinięcia dziesiętne. Sumę mnogościową zbioru liczb niewymiernych i wymiernych nazywa się **zbiorem liczb rzeczywistych** i oznacza $\mathbb{R}$. (Niezbyt precyzyjnie) zbiór liczb rzeczywistych można zdefiniować jako zbiór granic wszystkich możliwych ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych. Zachodzi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \,. \tag{5}$$

Można udowodnić, że zbioru liczb rzeczywistych **nie da się** ustawić w ciąg, ponumerować. Zbiór liczb rzeczywistych jest **nieprzeliczalny**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych, które są pierwiastkami równań wielomianowych o współczynnikach wymiernych, nazywamy zbiorem liczb algebraicznych. $\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną. Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. Liczby niewymierne niebędące pierwiastkami takich równań nazywa się liczbami przestępnymi. Najbardziej znanymi liczbami przestępnymi są π i podstawa logarytmów naturalnych, e. Zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

Działania na liczbach rzeczywistych

Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dodawanie jest przemienne:

$$x + y = y + x \tag{6}$$

Dodawanie jest łączne:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \tag{7}$$

Ćwiczenie: Udowodnij, że $x + (y + z) = (x + z) + y$. Dowód:

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= (y + z) + x \quad \text{(przemienność)} && \text{(8a)}\\
(y + z) + x &= y + (z + x) \quad \text{(łączność)} && \text{(8b)}\\
y + (z + x) &= (x + z) + y \quad \text{(przemienność)} && \text{(8c)}\\
x + (y + z) &= (x + z) + y && \text{(8d)}
\end{aligned}$$

Mnożenie jest przemienne:

$$x \cdot y = y \cdot x \tag{9}$$

Mnożenie jest łączne:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \tag{10}$$

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{11}$$

Kolejność działań

Mnożenie i dzielenie mają taki sam priorytet. Priorytet ten jest wyższy, niż dodawania i odejmowania, które z kolei mają równy sobie priorytet. (Odejmowanie to dodawanie liczb ujemnych.) Napis $a + b \cdot c$ interpretujemy jako $a + (b \cdot c)$. Dla uniknięcia niejednoznaczności należy stosować nawiasy; wyrażenie w nawiasie oblicza się najpierw.

Przykład:

$$2 + 4 : 3 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \tag{12a}$$

ale

$$(2 + 4) : 6 = 6 : 6 = 1 \tag{12b}$$

Uwaga: Zdecydowanie odradzam stosowania “szkolnego” zapisu $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, gdyż to ostatnie można łatwo pomylić z $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.